КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К ВОПРОСУ О ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНКАХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

А. И. Балинский, Б. М. Подлевский

Пусть в гильбертовом пространстве H задан полиномиальный пучок самосопряженных операторов

$$P(\lambda) = \lambda^n A_0 + \lambda^{n-1} A_1 + \cdots + \lambda A_{n-1} + A_n,$$

удовлетворяющий условиям теоремы, установленной в работе [1] (по терминологии статьи [3], $P(\lambda)$ — сильно гиперболический пучок). Соответствующий ассоциированный оператор, действующий в пространстве $\tilde{H}$ прямой (ортогональной) суммы n экземпляров пространства H, обозначим через $\tilde{A}$, левый симметризатор оператора $\tilde{A}$ — через $\tilde{S}$ ($\tilde{S} \gg 0$). Поскольку $\sigma(P) = \sigma(\tilde{A})$ и оператор $\tilde{A}$ является самосопряженным в гильбертовом пространстве $\tilde{H}_{\tilde{s}}$, получаемом путем введения в $\tilde{H}$ нового скалярного произведения $(\tilde{x}, \tilde{y})_{\tilde{s}} = (\tilde{S}\tilde{x}, \tilde{y})$, то приходим к задаче о спектре самосопряженного оператора. К самосопряженным операторам применима, в частности, теорема Крылова — Боголюбова [2], которую в данном случае можно сформулировать так.

Теорема 1. *Пусть для произвольного вектора $\tilde{x} \in \tilde{H}_{\tilde{s}}$ ($x \neq 0$) определены числа*

$$a_0 = (\tilde{x}, \tilde{x})_{\tilde{s}}, \quad a_1 = (\tilde{A}\tilde{x}, \tilde{x})_{\tilde{s}}, \quad a_2 = (\tilde{A}\tilde{x}, \tilde{A}\tilde{x})_{\tilde{s}}.$$

Тогда можно указать значение $\lambda_0 \in \sigma(\tilde{A})$, удовлетворяющее неравенствам

$$(a_1 - \delta)/a_0 \leqslant \lambda_0 \leqslant (a_1 + \delta)/a_0, \quad \delta = (a_0 a_2 - a_1^2)^{1/2}.$$

Применение к оператору $\tilde{A}$ других известных результатов о двусторонних оценках (см., например, [4]) приводит к таким теоремам.

Теорема 2 (Темпль). *Если интервал (α, β) не содержит точек спектра оператора $\tilde{A}$, то*

$$\alpha\beta a_0 \geqslant (\alpha + \beta) a_1 - a_2.$$

Теорема 3 (Диаз — Меткальф). *Если $\sigma(\tilde{A})$ содержится в конечном интервале $[m, M]$, то имеет место неравенство*

$$M m a_0 \leqslant (M + m) a_1 - a_2,$$

где числа a_0, a_1, a_2 определяются так же, как в теореме 1.

Заметим, что для оператора $\tilde{A}$ итерации $\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k$ (с произвольным начальным вектором $\tilde{x}_0 \in \tilde{H}_{\tilde{s}}$; $k = 0, 1, 2, \ldots$) сходятся зачастую к собственному вектору, отвечающему наибольшему по модулю собственному значению. Учитывая это и применяя оценки теоремы 1 с числами $a_0^{(k)} = (\tilde{x}_k, \tilde{x}_k)_{\tilde{s}}$,

$a_1^{(k)} = (\tilde{A}\tilde{x}_k, \tilde{x}_k)_{\tilde{s}}$, $a_2^{(k)} = (\tilde{A}\tilde{x}_k, \tilde{A}\tilde{x}_k)_{\tilde{s}}$, приходим к соответствующей последовательности двусторонних оценок наибольшего по модулю собственного значения пучка $P(\lambda)$.

Учет структуры оператора $\tilde{A}$ приводит к упрощению формул для чисел $a_i^{(k)}$. Действительно, учитывая соотношения $x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)}$, $x_2^{(k+1)} = x_3^{(k)}$, ..., $x_{n-1}^{(k+1)} = x_n^{(k)}$, $x_n^{(k+1)} = -A_0(A_1 x_n^{(k)} + A_2 x_{n-1}^{(k)} + \ldots + A_n x_1^{(k)})$ между компонентами векторов $\tilde{x}_k$ и $\tilde{x}_{k+1}$, записываем итерационную формулу

$$y_k = -A_0(A_1 y_{k-1} + A_2 y_{k-2} + \cdots + A_n y_{k-n}) \qquad (k = n,\ n+1,\ \ldots)$$

с начальными элементами $y_0 = x_1^{(0)}$, $y_1 = x_2^{(0)}$, ..., $y_{n-1} = x_n^{(0)}$. При этом, очевидно, вектор $\tilde{x}_k = \{y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+n-1}\}$. Так как оператор $\tilde{S}$ симметризует каждый из операторов $\tilde{A}^k$, то $a_0^{(k)} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_{2k})_{\tilde{s}}$, $a_1^{(k)} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_{2k+1})_{\tilde{s}}$, $a_2^{(k)} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_{2k+2})_{\tilde{s}}$.

Обозначая $\tilde{S}\tilde{x}_0 = \tilde{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, приходим к формулам

$$a_0^{(k)} = (u_1, y_{2k}) + (u_2, y_{2k+1}) + \cdots + (u_n, y_{2k+n-1}),$$

$$a_1^{(k)} = (u_1, y_{2k+1}) + (u_2, y_{2k+2}) + \cdots + (u_n, y_{2k+n}),$$

$$a_2^{(k)} = (u_1, y_{2k+2}) + (u_2, y_{2k+3}) + \cdots + (u_n, y_{2k+n+1}) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что при каждом последующем итерационном шаге необходимо вычислять лишь два новые значения чисел $a_i^{(k)}$.

Отметим, что для квадратичных операторных пучков специального вида аналогичные вопросы рассматривались в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Балінський А. І., Зорій Л. М.— ДАН УРСР. Сер. А, 1972, 6, 485.
2. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.— Изв. АН СССР. ОФМ, 1929, 5, 471.
3. Маркус А. С., Мереуца И. В.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1973, 37, 5, 1108.
4. Hadeler K. P.— ZAMM, 1967, 47, 2, 91.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТИ ЗАДЕЛКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ СЛЕДЯЩЕЙ И КОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛ

Д. А. Байдак, А. И. Балинский

Рассмотрим упругий стержень длины l, жесткость и масса которого изменяются по законам

$$EI(\xi) = EI_0\left(1 - \frac{\xi}{H}\right)^4, \quad m(\xi) = m_0\left(1 - \frac{\xi}{H}\right)^2,$$

где $I_0 = \pi R^4/4$, $m_0 = \pi\rho R^2$, ρ — плотность материала, R — радиус нижнего основания, что соответствует однородному стержню в виде срезанного конуса ($l \leqslant H$, H — высота соответствующего полного конуса; ось ξ направлена по оси конуса).

Пусть нижний конец ($\xi = 0$) упруго защемлен, а другой ($\xi = l$) — нагружен консервативной силой G и следящей силой P. Исследование малых колебаний и устойчивости прямолинейной формы равновесия рассматриваемого стержня сводится к следующей задаче на собственные значения: