$$\pm \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} g_{41} + g_{43} - g_{11}\overset{1}{g}_{21} - \bar{g}_{11}\overset{2}{g}_{21}\right)\Big]\delta^5\Big\}, \tag{25}$$

$$P = \frac{2CD_1\sqrt{l}}{\sqrt{\pi}}\Big\{\pm 1 + \overset{1}{g}_{00}\delta \mp \frac{1}{2}\overset{*}{g}_{10}\delta^2 - \frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{20} + \overset{*}{g}_{22} - \overset{0}{g}_{11})\,\delta^3 \pm$$

$$\pm \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\overset{*}{g}_{30} - \overset{*}{g}_{32} + \overset{0}{g}_{21}\right)\delta^4 + \frac{1}{4}\Big[-\frac{3}{2}\overset{*}{g}_{40} - \overset{*}{g}_{42} + \overset{0}{g}_{31} + \overset{0}{g}_{11}\overset{1}{g}_{11} -$$

$$-\bar{\overset{0}{g}}_{11}\overset{2}{g}_{11} - \frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{44} - \overset{0}{g}_{33} + \overset{*}{g}_{20}\overset{1}{g}_{11} - \bar{\overset{*}{g}}_{20}\overset{2}{g}_{11} - \overset{*}{g}_{10}\overset{1}{g}_{21} +$$

$$+ \bar{\overset{*}{g}}_{10}\overset{2}{g}_{21} - \overset{*}{g}_{22}\overset{1}{g}_{11} + \bar{\overset{*}{g}}_{22}\overset{2}{g}_{11})\Big]\delta^5\Big\}. \tag{26}$$

Здесь введены обозначения

$$g_{jk} = q\overset{1}{g}_{jk} + \bar{q}\overset{2}{g}_{jk}, \quad \overset{*}{g}_{jk} = \overset{1}{g}_{jk} - \overset{2}{g}_{jk}, \quad \overset{0}{g}_{jk} = \overset{1}{g}_{00}\overset{1}{g}_{jk} - \bar{\overset{1}{g}}_{00}\overset{2}{g}_{jk},$$

$$2\overset{1}{g}_{00} = i\overset{1}{r}_0, \; 8\overset{1}{g}_{10} = A(4 + h^{-2} + 2h^2) + Bh^2, \;\; 8\overset{1}{g}_{11} = -A(5 + h^2 + h^{-2}) - B,$$

$$4\overset{2}{g}_{10} = -4\overset{2}{g}_{11} = A(1 + h^2),$$

$$8g_{20}^k = ia_{20}^k, \quad 8g_{21}^k = -ib_{20}^k, \quad 8g_{22}^k = ic_{20}^k,$$

$$16g_{30}^k = -a_{30}^k, \quad 16g_{31}^k = b_{30}^k + a_{31}^k, \quad 16g_{32}^k = -(c_{30}^k + b_{31}^k), \quad 16g_{33}^k = c_{31}^k,$$

$$32g_{40}^k = -ia_{40}^k, \quad 32g_{41}^k = i(b_{40}^k + 2a_{41}^k), \quad 32g_{42}^k = -i(c_{40}^k + 2b_{41}^k +$$

$$+ a_{42}^k), \quad 32g_{43}^k = i(2c_{41}^k + b_{42}^k), \quad 32g_{44}^k = -ic_{42}^k, \quad k = 1, 2.$$

С помощью формул (25), (26) можно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений в общем случае, когда правая часть уравнения (18) является произвольной функцией

$$k_1 + ik_2 = \int_{-1}^{1} \psi(\theta(s_0), \overline{\theta(s_0)})\, ds_0 + P.$$

При рассмотрении задачи без учета температуры необходимо положить $P = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Билби Б., Эшелби Дж. Дислокации и теория разрушения.— В кн.: Разрушение. Т. 1. «Мир», М., 1973.
2. Гайвась И. В.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 9. «Наукова думка», К., 1970.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. «Наука», М., 1968.
5. Прусов А. И. Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1972.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1974 г.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Б. Л. Пелех, М. А. Сухорольский

Исходные соотношения. Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину толщиной $2h$, находящуюся под действием температурного поля и статических нагрузок, приложенных к внешним поверхностям. Силовые воздействия представим в виде симметричных p_{i1} и антисимметричных p_{i2} нагрузок

$i = x, y, z$). Напряженно-деформированное состояние пластины описывается уравнениями трехмерной теории упругости в декартовых координатах.

Представим компоненты вектора перемещений и температуру в виде рядов по полиномам Лежандра $P_k\left(\frac{z}{h}\right)$ [1]:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k P_k, \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k P_k, \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k P_k, \tag{1}$$

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} T_k P_k, \tag{2}$$

где u_k, v_k, w_k, T_k — функции координат x и y.

Далее, исходя из закона Гука и формул (1), выражения для напряжений запишем в виде

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2h} N_{kij} P_k \qquad (i, j = x, y, z). \tag{3}$$

Здесь N_{kij} — усредненные усилия высших порядков, зависимости которых от коэффициентов разложения компонентов смещения представляются следующим образом:

$$N_{kxx} = \frac{B}{2k+1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_k}{\partial y}\right) + \lambda N_{kzz} - N_{kx}^T,$$

$$N_{kyy} = \frac{B}{2k+1}\left(\frac{\partial v_k}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_k}{\partial x}\right) + \lambda N_{kzz} - N_{ky}^T, \tag{4}$$

$$N_{kxy} = \frac{B(1-\nu)}{2(2k+1)}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x}\right);$$

$$N_{kzz} - N_{k+2,zz} = 2E_0'\left[w_{k+1} + \lambda h\left(\frac{\theta_k}{2k+1} - \frac{\theta_{k+2}}{2k+5}\right)\right] - N_{kz}^T + N_{k+2,z}^T,$$

$$N_{kxz} - N_{k+2,kx} = 2G'\left(u_{k+1} + \frac{h}{2k+1}\frac{\partial w_k}{\partial x} - \frac{h}{2k+5}\frac{\partial w_{k+2}}{\partial x}\right), \tag{5}$$

$$N_{kyz} - N_{k+2,yz} = 2G'\left(v_{k+1} + \frac{h}{2k+1}\frac{\partial w_k}{\partial y} - \frac{h}{2k+5}\frac{\partial w_{k+2}}{\partial y}\right).$$

Температурные усредненные усилия определяются из формул

$$N_{kx}^T = N_{ky}^T = \frac{(1+\nu)B}{2k+1}\alpha T_k,$$

$$N_{kz}^T = \frac{2hE'k_T'}{2k+1}\alpha' T_k. \tag{6}$$

В формулах (4), (5) и (6) приняты такие обозначения:

$$E_0' = \frac{(1-\nu)(E')^2}{(1-\nu)E' - 2(\nu')^2 E}, \quad \lambda = \frac{\nu' E}{(1-\nu)E'}, \quad \theta_k = \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y},$$

$$B = \frac{2hE}{1-\nu^2}, \quad k_T' = \left(1 - \nu + \frac{2E\nu'\alpha}{E'\alpha'}\right)\left[1 - \nu - \frac{2E(\nu')^2}{E'}\right]^{-1},$$

E, E'; ν, ν'; α, α' — модули Юнга, коэффициенты Пуассона и коэффициенты температурного расширения в направлениях плоскости пластины и перпендикулярных к ней, G' — модуль поперечного сдвига.

Уравнение равновесия в усредненных усилиях получим подстановкой выражения (2) в трехмерные уравнения равновесия в напряжениях

$$\frac{\partial N_{kxi}}{\partial x} + \frac{\partial N_{kyi}}{\partial y} + 2p_{i2} - \sum_{j=1,3,\ldots}^{k-1} \frac{2j+1}{h} N_{jzi} = 0$$

$$(i = x, y, z; \quad k = 0, 2, 4, \ldots), \tag{7}$$

$$\frac{\partial N_{kxi}}{\partial x}+\frac{\partial N_{kyi}}{\partial y}+2p_{i1}-\sum_{j=0,2,\ldots}^{k-1}\frac{2j+1}{h}N_{jzi}=0$$

$$(i=x,\,y,\,z;\quad k=1,\,3,\,5,\,\ldots).$$

Граничные условия на внешних поверхностях пластины на основании форфул (3) при подстановке в них $z=h$ можно представить в таком виде:

$$p_{i1}=\sum_{k=0,2,\ldots}^{\infty}\frac{2k+1}{2h}N_{kiz},\quad p_{i2}=\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{2k+1}{2h}N_{kiz}\qquad (i=x,\,y,\,z). \tag{8}$$

Подстановкой формул (4), (5) в уравнения равновесия (7) и условия (8) можно получить систему двумерных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения компонентов смещения.

Условия на краях пластины задаем с помощью формул (1) или (3). Отметим, что задача определения напряженно-деформированного состояния пластины разбивается на независимые задачи изгиба и растяжения пластины.

Построение приближений. Напряжения, действующие на площадках с нормалью z, аппроксимируем конечным числом полиномов, удовлетворяя при этом условиям на внешних поверхностях пластины. Определяем n-е приближение, если касательные напряжения приближены полиномами $P_0,\,P_1,\,\ldots,\,P_{2n}$, а нормальные — полиномами $P_0,\,P_1,\,\ldots,\,P_{2n-1}$. Выражения (8) при этом принимают вид

$$\begin{gathered}p_{i1}=\sum_{k=0,2,\ldots}^{2n}\frac{2k+1}{2h}N_{kiz},\quad p_{i2}=\sum_{k=1,3,\ldots}^{2n}\frac{2k+1}{2h}N_{kiz},\\ p_{z1}=\sum_{k=0,2,\ldots}^{2n-1}\frac{2k+1}{2h}N_{kzz},\quad p_{z2}=\sum_{k=1,3,\ldots}^{2n-1}\frac{2k+1}{2h}N_{kzz}\qquad (i=x,\,y).\end{gathered} \tag{9}$$

Теперь соотношения (9) и (5) представляют собой полную систему линейных алгебраических уравнений для определения усредненных усилий N_{kzz} $(k=0,\,1,\,\ldots,\,2n-3)$ и $N_{kxz},\,N_{kyz}$ $(k=0,\,1,\,\ldots,\,2n-2)$ — их зависимостей от конечного числа коэффициентов разложения компонентов смещения. Ограничиваясь этим числом коэффициентов, выражения для перемещений записываем в виде

$$u=\sum_{k=0}^{2n-1}u_kP_k,\quad v=\sum_{k=0}^{2n-1}v_kP_k,\quad w=\sum_{k=0}^{2n}w_kP_k. \tag{10}$$

Кроме того, принимаем, что

$$w_{2n-1}=w_{2n}=0. \tag{11}$$

Выражения для напряжений σ_{xx}, σ_{yy} и σ_{xy} представим в виде суммы конечного числа членов

$$\sigma_{ij}=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{2k+1}{2h}N_{kij}P_k\qquad (i,\,j=x,\,y). \tag{12}$$

Усредненные усилия N_{kij}, определяемые формулами (4), являются функциями только коэффициентов разложения компонентов смещения, содержащихся в формулах (10).

В разложении (2) на основании выражения (12) можно сохранить только $2n$ членов $T=\sum\limits_{k=0}^{2n-1}T_kP_k$ и, кроме того, на основании (11) принять равными нулю температурные усилия $N'_{2n-1,z}$, $N'_{2n,z}$. Аналогично на основании формул (10) и (11) в системе уравнений (7) можно сохранить по $2n$ уравнений при $i=x,\,y$ и $2n-1$ уравнений при $i=z$. Полученные уравнения с помощью соотношений (4), (5) можно свести к системе дифференциальных уравнений $2\,(6n-1)$-го порядка относительно $6n-1$ неизвестных коэффициентов разложения компонентов смещения.

Следует отметить, что в каждом из приближений введением дополнительных гипотез возможно уменьшение количества неизвестных и понижение порядка системы дифференциальных уравнений. Соотношения первого приближения с незначительными изменениями совпадают с соотношениями теории тонких пластинок [2,3].

Теория второго порядка. Рассмотрим случай силовой задачи при отсутствии касательных напряжений на внешних поверхностях пластины. Выражения для напряжений σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} и перемещений u, v, w получим из выражений (10) и (11) при подстановке $n = 2$:

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij} = \frac{1}{2h}\left(N_{0ij}P_0 + N_{1ij}P_1 + N_{2ij}P_2 + N_{3ij}P_3\right),\\
u = u_0P_0 + u_1P_1 + u_2P_2 + u_3P_3,\\
v = v_0P_0 + v_1P_1 + v_2P_2 + v_3P_3,\\
w = w_0P_0 + w_1P_1 + w_2P_2 \qquad (i, j = x, y),
\end{gathered} \tag{13}$$

а выражения для напряжений σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz} получим на основании соотношений (3) и (9):

$$\begin{gathered}
\sigma_{iz} = \frac{1}{2h}\left[N_{0iz}(P_0 - P_4) + 3N_{1iz}(P_1 - P_3) + 5N_{2iz}(P_2 - P_4)\right],\\
\sigma_{zz} = \frac{1}{2h}\left[N_{0zz}(P_0 - P_2) + 3N_{1zz}(P_1 - P_3)\right] + p_{z1}P_2 + p_{z2}P_3 \qquad (i = x, y).
\end{gathered} \tag{14}$$

Формулы для усредненных усилий N_{klj} $(i,\ j = x,\ y;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ имеют вид (4), если согласно выражению (9) принять

$$\begin{gathered}
N_{3zz} = -\frac{3}{7}N_{1zz} + \frac{2h}{7}p_{2z},\\
N_{2zz} = -\frac{1}{5}N_{0zz} + \frac{2h}{5}p_{1z}.
\end{gathered} \tag{15}$$

Решая систему уравнений (5), (9) при $n = 2$ относительно усредненных усилий N_{klz}, получаем

$$\begin{gathered}
N_{0xz} = \frac{28G'}{15}\left[u_1 + \frac{9}{14}u_3 + h\frac{\partial}{\partial x}\left(w_0 - \frac{w_2}{14}\right)\right],\\
N_{1xz} = \frac{7G'}{5}\left(u_2 + \frac{h}{3}\frac{\partial w_1}{\partial x}\right),\\
N_{2xz} = -\frac{2G'}{15}\left[u_1 - 9u_3 + h\frac{\partial}{\partial x}(w_0 - 2w_2)\right],\\
N_{0yz} = \frac{28G'}{15}\left[v_1 + \frac{9}{14}v_3 + h\frac{\partial}{\partial y}\left(w_0 - \frac{w_2}{14}\right)\right],\\
N_{1yz} = \frac{7G'}{5}\left(v_2 + \frac{h}{3}\frac{\partial w_1}{\partial y}\right),\\
N_{2yz} = -\frac{2G'}{15}\left[v_1 - 9v_3 + h\frac{\partial}{\partial y}(w_0 - 2w_2)\right],\\
N_{0zz} = \frac{5E_0'}{3}\left[w_1 + h\lambda\left(\theta_0 - \frac{\theta_2}{5}\right)\right] + \frac{h}{3}p_{1z},\\
N_{1zz} = \frac{7E_0'}{5}\left[w_2 + h\lambda\left(\frac{\theta_1}{3} - \frac{\theta_3}{7}\right)\right] + \frac{h}{5}p_{2z}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial N_{0xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{0xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial N_{2xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{2xy}}{\partial y} - \frac{3}{h}N_{1xz} = 0,\\
\frac{\partial N_{0yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{0xy}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial N_{2yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{2xy}}{\partial x} - \frac{3}{h}N_{1yz} = 0,
\end{gathered} \tag{17}$$

$$\frac{\partial N_{1xz}}{\partial x}+\frac{\partial N_{1yz}}{\partial y}-\frac{1}{h}N_{0zz}+2p_{1z}=0,$$
$$\frac{\partial N_{1yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{1xy}}{\partial x}-\frac{1}{h}N_{0yz}=0,$$
$$\frac{\partial N_{1xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{1xy}}{\partial y}-\frac{1}{h}N_{0xz}=0,$$
$$\frac{\partial N_{3xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{3xy}}{\partial y}-\frac{1}{h}(N_{0xz}-5N_{2xz})=0, \qquad (18)$$
$$\frac{\partial N_{3yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{3xy}}{\partial x}-\frac{1}{h}(N_{0yz}-5N_{2yz})=0,$$
$$\frac{\partial N_{0xz}}{\partial x}+\frac{\partial N_{0yz}}{\partial y}+2p_{2z}=0,$$
$$\frac{\partial N_{2xz}}{\partial x}+\frac{\partial N_{2yz}}{\partial y}-\frac{3}{h}N_{1zz}+2p_{2z}=0.$$

Уравнения равновесия (17) и (18) характеризуют напряженное состояние растяжения и изгиба пластины соответственно. Подстановкой выражений (16) и (4) с учетом (15) в уравнения (17) и (18) приходим к двум независимым системам дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения компонентов смещения: десятого порядка в случае растяжения и двенадцатого — в случае изгиба пластины. Эти системы уравнений можно свести к таким разрешающим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\Delta U_0' = -\frac{2h\lambda}{B}\Delta p_{z1},$$
$$\Delta V_2 - \frac{21(1-k_1)}{2\lambda(1-\nu)h^2}v_2=0, \qquad (19)$$

$$\Delta\Delta W_1 - \frac{5(3+7k_1)(k_2-1)}{7\lambda k_2(1-k_1)h^3}\Delta W_1+\frac{75(k_2-1)}{2\lambda^2 k_2 h^4}W_1=\frac{25}{21G'}\Delta p_{z1},$$
$$\Delta\Delta V_1-\frac{28(1-k_1)}{(1-\nu)h^2}\Delta V_1+\frac{63(1-k_1)^2}{(1-\nu)^2\lambda^2 h^4}V_1=0,$$
$$\Delta\Delta W_0-\frac{7(5+9k_1)(k_2-1)}{3\lambda k_2(1-k_1)h^2}\Delta W_0+\frac{21\cdot 35(k_2-1)}{2k_2\lambda^2h^4}W_0= \qquad (20)$$
$$=\frac{9(k_2-1)}{10\lambda E_0'}\left[\Delta p_{z2}-\frac{14k_1(k_2-1)}{3\lambda(1-k_1)k_2h^2}p_{z2}\right],$$
$$\Delta\Delta U_1'=-\frac{12h\lambda}{5B}\left(\Delta p_{2z}+\frac{5}{2\lambda h^2}p_{2z}\right),$$

где $k_1=1-\frac{4h\lambda G'}{B}$, $k_2=1+\frac{2h\lambda^2E_0'}{B}$.

Коэффициенты приближения компонентов смещения полиномами Лежандра представляются следующим образом:

$$u_i=\frac{\partial U_i}{\partial x}-\frac{\partial V_i}{\partial y}, \qquad v_i=\frac{\partial U_i}{\partial y}+\frac{\partial V_i}{\partial x},$$
$$w_0=\frac{2B}{3G'}\frac{\partial p_1}{\partial x}-\frac{1}{h}\left(U_1+U_3-\frac{5}{14}W_0-5\Phi\right), \qquad (21)$$
$$w_1=\frac{3}{h}\left[\frac{20}{7(1-k_1)}W_1-U_2\right],$$
$$w_2=-\frac{2B}{3G'}\frac{\partial p_1}{\partial x}-\frac{5}{h}(U_3-W_0+\Phi) \qquad (i=0,1,2,3).$$

Здесь обозначено:

$$U_0 = U'_{00} + xp_0 + yq_0 + p_2 - W_1,$$

$$V_0 = \frac{2}{1-\nu}(xq_0 - yp_0 + q_2), \quad U_2 = \frac{4h^2\lambda}{3}\frac{\partial p_0}{\partial x} - F_1,$$

$$U_1 = U'_{10} + xp_1 + yq_1 + p_3 - W_0,$$

$$U_3 = -\frac{4h^2\lambda(1+k_1)}{15(1-k_1)}\frac{\partial p_1}{\partial x} - F_0,$$

$$V_3 = \frac{5h^2\lambda(1-\nu)}{9(1-k_1)}\Delta V_1 - \frac{14}{9}V_1, \tag{22}$$

$$\Phi = \frac{2h^2\lambda}{15}\left(\frac{1}{1-k_1}\Delta U'_{10} + \frac{3}{5G'}p_{z2}\right),$$

$$F_1 = h^2\lambda\left[\frac{2k_2}{5(k_2-1)}\Delta W_1 - \frac{13+7k_1}{7h^2\lambda(1-k_1)}W_1 + \frac{k_2}{35\lambda E'_0}p_{1z}\right],$$

$$F_0 = h^2\lambda\left[\frac{2k_2}{21(k_2-1)}\Delta W_0 - \frac{19+9k_1}{9h^2\lambda(1-k_1)}W_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1+k_1}{2h^2\lambda}\Phi + \frac{3k_2}{35\lambda E'_0}p_{z2}\right].$$

Функции U'_{10}, U'_{00} и $xp_0 + yq_0 + p_2$, $xp_1 + yq_1 + p_3$ являются соответственно частными и однородными решениями первого уравнения (18) и третьего (19); функции $\varphi_0 = p_0 + iq_0$, $\varphi_1 = p_1 + iq_1$, $\chi_0 = p_2 + iq_2$ и $\chi_1 = p_3 + iq_3$ — произвольные аналитические функции.

Подстановкой выражений (21) с учетом (22) в формулы (16) получим зависимости усредненных усилий от разрешающих функций (19) и (20).

Граничные условия на внешнем контуре пластины формулируются на основании первых равенств формул (13) и (14) в случае первой основной задачи и на основании второго, третьего и четвертого равенств (13) в случае второй основной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. «Мецниереба», Тбилиси, 1965.
2. Подстригач Я. С., Пелех Б. Л.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций. 10. «Наукова думка», К., 1970.
3. Тимошенко С. Г., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1974 г.