положительные электрические заряды и ионы растворенного вещества концентрируются вблизи поверхности слоя и достигают максимума на границах $x = 0$, $x = l$, причем $\max \omega \approx 10^7 \frac{\kappa}{м^3}$, $\max c \approx 10^{-2}$.

Рисунок 2, *б* иллюстрирует распределение напряжений $\overset{*}{\sigma}_{xx} = \frac{2\sigma_{xx}}{\varepsilon_0 k^2 \Phi_0^2}$ (штриховые линии) и $\overset{*}{\sigma}_{yy} = \frac{2\sigma_{yy}}{\varepsilon_0 k^2 \Phi_0^2}$ (сплошные линии). Напряжения $\overset{*}{\sigma}_{yy}$, вычисленные с учетом влияния концентрации растворенного вещества, представлены кривыми *1*, а без учета концентрации — кривыми *2*. Соответствующие нормальные напряжения $\overset{*}{\sigma}_{xx}$ практически совпадают. Из графиков видно, что напряжения $\overset{*}{\sigma}_{xx}$, $\overset{*}{\sigma}_{yy}$ достигают максимума на поверхности слоя, причем $\max \sigma_{xx} \approx -5 \cdot 10^6 \frac{н}{м^2}$, $\max \sigma_{yy} \approx -2{,}5 \cdot 10^6 \frac{н}{м^2}$ с учетом концентрации и $\max \sigma_{yy} \approx 2{,}5 \cdot 10^6 \frac{н}{м^2}$ без учета концентрации.

Из анализа полученных решений следует, что приповерхностная область электропроводного слоя с массоизолированными границами при отсутствии внешних силовых, температурных и электромагнитных воздействий представляет собой конденсатор, внешнюю обкладку которого образуют электроны, а внутреннюю создают положительные ионы, что согласуется с известными литературными данными [3,7]. При этом ионы растворенного вещества концентрируются в приповерхностной области слоя. Наличие растворенного вещества практически не вызывает изменения объемного заряда ω, но оказывает заметное влияние на распределение механических напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабюк Т. И., Кушта Г. П., Чорней С. А.— ФММ, 1973, 4.
2. Добрецов Л. Н. Электронная и ионная эмиссия. ГИТТЛ, М., 1950.
3. Епифанов Г. И. Физика твердого тела. «Высшая школа», М., 1965.
4. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидец Б. М.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 1. «Наукова думка», К., 1975.
5. Царев Б. М. Контактная разность потенциалов. ГИТТЛ, М., 1955.
6. Шьюмон П. Диффузия в твердых телах. «Металлургия», М., 1966.
7. Яворский Б. М., Детлаф Н. А., Милковская Л. Б. Курс лекций по физике. Т. 2. «Высшая школа», М., 1960.
8. McQuhae K. G., Brown A. S.— Solid State Electronics, 1972, 2.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ТРЕЩИНОЙ

И. М. Зашкильняк

Рассмотрим две спаянные полуплоскости, одна из которых ослаблена трещиной L, расположенной под углом β к линии спая Γ и не выходящей на нее. Введем систему координат $x0y$ с началом в точке пересечения линии Γ и линии, на которой расположена трещина, а ось $0x$ направим по Γ. Обозначим всю плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ через S, область $y > 0$ с трещиной через S_1 и область $y < 0$ через S_2. В дальнейшем все величины с индексом «1» будут относиться к плоскости с трещиной, а с индексом «2» — к плоскости без трещины. Введем также систему координат $\rho 0 w$ с осью 0ρ, направленной по линии расположения трещины. В этой системе координат комплексная координата запишется $\zeta = \rho + iw$.

Предположим, что в кусочно-однородной плоскости без трещины известны стационарное температурное поле $t_0(x, y)$ и напряжения σ_{0ij} $(i, j = x, y)$, на линии спая полуплоскостей имеют место условия идеального теплового и механического контакта, а трещина теплоизолированная. При этих условиях нужно найти возмущение заданного температурного поля и термоупругое состояние, обусловленное наличием трещины.

Представим температуру и компоненты напряжений в виде суммы двух слагаемых:

$$T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y),$$

$$\sigma^*_{ij}(x, y) = \sigma_{0ij}(x, y) + \sigma_{ij}(x, y) \qquad (i, j = x, y).$$

Здесь $t(x, y)$ — искомая температура возмущения, σ_{ij} — компоненты искомых напряжений.

Для определения температуры и напряжений имеем следующие граничные условия: 1) условия идеального теплового и механического контакта на линии спая Г:

$$t_1(x, 0) = t_2(x, 0), \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\sigma^1_{yy} + i\sigma^1_{xy} = \sigma^2_{yy} + i\sigma^2_{xy}, \quad u_1(x, 0) + iv_1(x, 0) = u_2(x, 0) + iv_2(x, 0); \tag{2}$$

2) условия теплоизоляции трещины и отсутствия внешних усилий на ее берегах:

$$\frac{\partial T(\rho, 0)}{\partial w} = 0, \quad \sigma^*_{ww} + i\sigma^*_{\rho w} = 0. \tag{3}$$

Кроме того, $\lim\limits_{\operatorname{Im} z \to \infty} \sigma_{yy} = 0$, $\lim\limits_{x, y \to \infty} t_j(x, y) = 0$. Здесь λ_j — коэффициенты теплопроводности.

При решении задач термоупругости будем пользоваться известными формулами [3,5]

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z),$$

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \tag{4}$$

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{5}$$

$$2G \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \varkappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + H(1 + \varkappa) F(z), \tag{6}$$

где $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ — комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили, $F(z)$ — комплексный потенциал температуры, G — модуль сдвига, $H = \frac{\alpha E}{4(1-\nu^2)}$, $\varkappa = 3 - 4\nu$, $\alpha = \alpha_t(1 + \nu)$ — для плоской деформации, $H = \frac{\alpha E}{4}$, $\varkappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$, $\alpha = \alpha_t$ — для плоского напряженного состояния, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, α_t — коэффициент линейного теплового расширения.

В формулах (5), (6) функция $\Phi(z)$ распространяется на сопряженную область таким образом:

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}(z) - z\overline{\Phi'}(z) - \overline{\Psi}(z).$$

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу. Определим температурное поле в области S, когда в области S_1 в точке $z = \xi$ $(\zeta = \eta)$ действует стационарный тепловой диполь мощности $\gamma(\eta)$, ориентированный под углом β к оси $0x$. Если диполь находится в бесконечной плоскости, то комплексный потенциал температуры имеет вид

$$F_g(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i\lambda_1} \frac{e^{i\beta}\gamma(\xi e^{-i\beta})}{z - \xi},$$

Представим комплексный потенциал обусловленной этим диполем температуры $t(x, y)$ в области S в виде суммы

$$F_i(z, \xi) = F_g(z, \xi) + F_{0i}(z, \xi).$$

Решив теперь первую основную задачу для верхней и нижней полуплоскостей [3] и удовлетворив второе условие (1), определим комплексные потенциалы температуры. В системе координат $\rho 0 \varpi$ они имеют вид

$$F_1(\zeta, \eta) = \frac{\gamma(\eta)}{2\pi i \lambda_1}\left[\frac{1}{\eta - \zeta} - \frac{\lambda e^{-2i\beta}}{\zeta - \eta e^{-2i\beta}}\right],$$

$$F_2(\zeta, \eta) = \frac{\gamma(\eta)}{\pi i(\lambda_1 + \lambda_2)(\eta - \zeta)}, \qquad \lambda = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}.$$

Если диполи размещены по отрезку L с плотностью $\gamma(\eta)$, то температурное поле определяется по формуле

$$t_i(\rho, \varpi) = \operatorname{Re}\int_L F_i(\zeta, \eta)\, d\eta \qquad (i = 1, 2), \tag{7}$$

причем имеют место равенства

$$t_1^+ - t_1^- = \gamma(\eta), \qquad \gamma(a) = \gamma(b) = 0. \tag{8}$$

Здесь индексы «+» и «—» обозначают предельные значения соответствующих величин с правой и левой стороны трещины, a и b — абсциссы концов трещины.

Продифференцируем функцию (7) по ϖ, затем проинтегрируем по частям с учетом (8) и подставим найденное выражение в граничное условие (3). В результате для определения $\gamma(\eta)$ получим сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \gamma'(\eta)\left[\frac{1}{\eta - \rho} + R_4(\rho, \eta)\right] d\eta = -2\lambda_1 \frac{\partial t_0(\rho, 0)}{\partial \varpi} = \varphi(\rho) \qquad (\rho \in L), \tag{9}$$

$$R_4(\rho, \eta) = -\frac{\lambda_1}{2}\left[\frac{1}{\rho - \eta e^{2i\beta}} + \frac{1}{\rho - \eta e^{-2i\beta}}\right].$$

При определении термоупругого состояния области S будем описывать трещины с помощью дислокаций [1] с плотностью

$$g(\rho) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[v^+ - v^- - i(u^+ - u^-)\right],$$

где $u(\rho)$, $v(\rho)$ — перемещения берегов трещины. Если дислокация и диполь размещены в точке $z = \xi$ однородной плоскости, то

$$\Phi(z, \xi) = \frac{e^{i\beta}\omega(\xi e^{-i\beta})}{\xi - z}, \quad \Psi(z, \xi) = \frac{e^{-i\beta}\overline{\omega(\xi e^{-i\beta})}}{\xi - z} - \frac{\xi e^{-i\beta}\omega(\xi e^{-i\beta})}{(\xi - z)^2}, \tag{10}$$

где

$$\omega(\rho) = -\frac{D_1}{\pi}\left[g(\rho) + \frac{\alpha_1 i}{2\lambda_1}\gamma(\rho)\right], \quad D_1 = \frac{2G_1}{1 + \varkappa_1}.$$

Представим теперь комплексные потенциалы в области S_1 в виде суммы известных (10) и некоторых голоморфных функций, а в области S_2 — в виде голоморфных функций. Удовлетворяя на контуре Γ граничному условию (2), на основании формул (5), (6) после несложных преобразований получаем граничное условие для функций $\Phi_i(z)$:

$$\begin{gathered}(\Phi_1 + \Phi_2)^+ - (\Phi_1 + \Phi_2)^- = 0,\\ (\Phi_1 - m_1\Phi_2)^+ + m_2(\Phi_1 - m_1\Phi_2)^- = f(x),\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$m_1 = \frac{1 + \varkappa_2}{\Lambda(1 + \varkappa_1)}, \quad m_2 = \frac{1 + \Lambda\varkappa_2}{\Lambda + \varkappa_1}, \quad \Lambda = \frac{G_1}{G_2}, \quad m_3 = \frac{\Lambda\varkappa_2 + \Lambda + 1 + \varkappa_1}{(\Lambda + \varkappa_1)(1 + \varkappa_1)},$$

$$f(x) = m_3 \frac{iG_1\alpha_1}{2\lambda_1}\left[\alpha^* \frac{e^{i\beta}\gamma(\xi e^{-i\beta})}{x-\xi} - \lambda \frac{e^{-i\beta}\gamma(\bar{\xi}e^{i\beta})}{x-\bar{\xi}}\right], \quad \alpha^* = \frac{\alpha_2 \cdot 2\lambda_1}{\alpha_1(\lambda_1+\lambda_2)} - 1.$$

Решение граничных задач (11) имеет вид [4]

$$\Phi_1(z,\xi) = M_1(z,\xi) + \frac{m_1 - m_2}{1+m_1} M_2(z,\xi) + \lambda\overline{N(\bar{z},\xi)} \qquad (z \in S_1), \qquad (12)$$

$$\Phi_1(z,\xi) = \frac{m_1 m_2 - 1}{m_2(1+m_1)} M_1(z,\xi) + M_2(z,\xi) + \frac{\alpha^*}{m_2} N(z,\xi) \qquad (z \in S_2),$$

$$\Phi_2(z,\xi) = \frac{1+m_2}{1+m_1} M_2(z,\xi) + \lambda\overline{N(\bar{z},\xi)} \qquad (z \in S_1), \qquad (13)$$

$$\Phi_2(z,\xi) = \frac{m_2 - 1}{m_2(1+m_1)} M_1(z,\xi) + \frac{\alpha^*}{m_2} N(z,\xi) \qquad (z \in S_2),$$

где

$$N(z,\xi) = \frac{m_3}{1+m_1}\,\frac{iG_1\alpha_1}{2\lambda_1}\,\frac{\gamma(\xi e^{-i\beta})e^{i\beta}}{z-\xi}, \qquad M_1(z,\xi) = \frac{\omega(\xi e^{-i\beta})e^{i\beta}}{\xi - z},$$

$$M_2(z,\xi) = \frac{e^{-i\beta}\overline{\omega(\xi e^{-i\beta})} + e^{i\beta}\omega(\xi e^{-i\beta})}{z-\bar{\xi}} + \frac{(ze^{-i\beta} - \xi e^{i\beta})\,\omega(\xi e^{-i\beta})}{(z-\bar{\xi})^2}.$$

Используя формулу (4) и выражения для комплексных потенциалов, на линии расположения трещины находим

$$\sigma_{ww} + i\sigma_{w\rho} = \overline{\omega(\eta)}\left[\frac{2}{\eta-\rho} + R_1(\rho,\eta)\right] + \omega(\eta)R_2(\rho,\eta) - i\gamma^*(\eta)R_3(\rho,\eta), \quad (14)$$

$$R_1(\rho,\eta) = A\left[\frac{1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\eta(1-e^{-2i\beta})^2}{\rho_1^2} + \frac{2\eta^2 e^{-2i\beta}(1-e^{-2i\beta})^2}{\rho_1^3}\right] + \frac{B}{\rho_1},$$

$$R_2(\rho,\eta) = A\left[\frac{\eta(1-e^{-2i\beta})}{\rho_1^2} + \frac{\eta e^{2i\beta}(1-e^{2i\beta})}{\bar{\rho}_1^2}\right],$$

$$R_3(\rho,\eta) = -A_1\lambda\left[\frac{e^{2i\beta}}{\bar{\rho}_1} + \frac{\eta e^{-2i\beta}(1-e^{-2i\beta})}{\rho_1^2}\right] + \frac{B_1\alpha^*}{\rho_1}, \quad \rho_1 = \rho - \eta e^{-2i\beta},$$

где

$$\gamma^*(\eta) = \frac{\alpha_1 D_1 \gamma(\eta)}{2\lambda_1}, \quad A = \frac{\Lambda - 1}{\Lambda + \varkappa_1}, \quad B = \frac{\Lambda\varkappa_2 - \varkappa_1}{1 + \Lambda\varkappa_2}, \quad A_1 = 1 - A, \; B_1 = 1 - B.$$

Требуя теперь, чтобы на месте разрывов сумма заданных напряжений и напряжений (14) равнялась нулю, для определения плотности дислокаций получаем такое сингулярное интегральное уравнение:

$$\int_L \left\{\overline{\omega(\eta)}\left[\frac{2}{\eta-\rho} + R_1(\eta,\rho)\right] + \omega(\eta)R_2(\eta,\rho)\right\} d\eta =$$

$$= -(\sigma_{0ww} + i\sigma_{0\rho w}) + i\int_L \gamma^*(\eta)R_3(\eta,\rho)\,d\eta. \qquad (15)$$

Определив из этого уравнения $\omega(\eta)$ и подставив его в выражения (12), (13), после интегрирования последних по линии L найдем комплексные потенциалы, через которые определяются компоненты напряжений. Зная $\omega(\eta)$, нетрудно найти коэффициенты интенсивности напряжений по формуле

$$k_1 + ik_2 = \pm\sqrt{\frac{\pi}{l}} \lim_{\rho \to a,b} \sqrt{(b-\rho)(\rho-a)}\,\overline{\omega(\rho)}. \qquad (16)$$

где $2l = b - a$ — длина трещины.

Сделаем замену переменных $w = w_*$, $\rho = \rho_* + \frac{a+b}{2}$ и введем безразмерные координаты $s = \frac{\rho_*}{l}$, $\sigma = \frac{\eta_*}{l}$, $\delta = \frac{l}{d}$, где d — расстояние от центра трещины до линии спая. Тогда уравнения (9) и (15) запишутся так:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \gamma'(\sigma)\left[\frac{1}{\sigma - s} + R_4(\sigma, s)\right] d\sigma = \varphi(s), \qquad (17)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \left\{\overline{p(\sigma)}\left[\frac{1}{\sigma - s} + \frac{1}{2} R_1(\sigma, s)\right] + p(\sigma)\frac{1}{2} R_2(\sigma, s)\right\} d\sigma = \theta(s), \qquad (18)$$

где

$$p(s) = -\frac{\pi}{D_1}\omega(s), \quad \theta(s) = \frac{1}{2D_1}(\sigma_{0ww} + i\sigma_{0\rho w}) - \frac{i\alpha_1}{4\lambda_1}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\gamma(\sigma) R_3(\sigma, s)\, d\sigma.$$

Функции $p(s)$ и $\gamma'(s)$ удовлетворяют условию

$$\int_{-1}^{1} p(s)\, ds = \frac{\alpha_1 i}{2\lambda_1}\int_{-1}^{1}\gamma(s)\, ds, \qquad \int_{-1}^{1}\gamma'(s)\, ds = 0. \qquad (19)$$

Разложим ядра и правые части уравнений (17), (18) в ряд по параметру δ ($\delta < 1$):

$$\frac{1}{2} R_k(s, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^k(s, \sigma)\,\delta^{n+1} \qquad (k = 1, 2, 3, 4), \qquad (20)$$

$$\theta(s) = \sum_{m=0}^{\infty}\theta_m(s)\,\delta^m, \quad \varphi(s) = \sum_{m=0}^{\infty}\varphi_m(s)\,\delta^m. \qquad (21)$$

Здесь

$$r_n^k(s, \sigma) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n-2}(-1)^m\frac{n!}{m!\,(n-m-2)!}\times$$

$$\times(-a_{nm}^k s^2 + b_{nm}^k s\sigma - c_{nm}^k\sigma^2)\, s^{n-m-2}\sigma^m \qquad (k = 1, 2, 3),$$

$$r_0^1 = -\frac{i}{4}(A + B)h, \quad r_1^1 = \frac{s}{8}[(4 + h^{-2} + 2h^2)A + Bh^2] - \frac{\sigma}{8}[A(5 + h^2 +$$

$$+ h^{-2}) + B], \quad r_0^2 = 0, \quad r_1^2 = \frac{A}{4}(s - \sigma)(1 + h^2), \quad r_0^3 = \frac{A_1\lambda}{8}(h^{-1} + h) +$$

$$+ \frac{B_1\alpha^*}{8}h, \quad r_1^3 = \frac{s}{8}(3A_1\lambda + B_1\alpha^* h^2) - \frac{\sigma}{8}[A_1\lambda(1 + h^2 + h^{-2}) + B\alpha^*],$$

$$a_{nm}^1 = \frac{A}{2}[(-1)^{n+1}\bar{\varepsilon}^1 + (n + 1)(h^3 + h + nh^{-1})\varepsilon^{-2}] + \frac{B}{2}\varepsilon^1,$$

$$b_{nm}^1 = \frac{A}{2}\left\{(-1)^{n+1}\cdot 2\bar{\varepsilon}^1 + [2n^2 h + n(h^3 + 3h^{-1} + 2h) + 2(h + h^{-1})]\varepsilon^{-2}\right\} +$$

$$+ B\varepsilon^{-1}, \quad c_{nm}^1 = \frac{A}{2}\{(-1)^{n+1}\bar{\varepsilon}^{-3} + [n^2 h + (3n + 1)h^{-1} + h^{-3}]\varepsilon^{-2}\} + \frac{B}{2}\varepsilon^{-3},$$

$$a_{nm}^2 = \frac{A}{2}(n + 1)[\varepsilon^{+1} + (-1)^{n+1}\bar{\varepsilon}^1],$$

$$b_{nm}^2 = \frac{A}{2}\left\{[nh(1 + h^2) + 2h]\varepsilon^{-2} + (-1)^{n+1}[2h + n(h + h^{-1})]\bar{\varepsilon}^{-2}\right\},$$

$$c_{nm}^2 = \frac{A}{2}[(h^{-1} + nh)\varepsilon^{-2} + (-1)^{n+1}(h^3 + nh)\bar{\varepsilon}^{-2}],$$

$$a_{nm}^3 = \frac{A_1\lambda}{2}[(-1)^{n+1}\bar{\varepsilon}^{-1} + (n + 1)\varepsilon^{-1}] + \frac{B_1\alpha^*}{2}\varepsilon^1,$$

$$b_{nm}^3 = \frac{A_1\lambda}{2}\{2(-1)^{n+1}\bar{\varepsilon}^{-3} + [(2 + n)h^{-1} + nh]\varepsilon^{-2}\} + B_1\alpha^*\varepsilon^{-1},$$

$$c_{nm}^3 = \frac{A_1\lambda}{2}[(-1)^{n+1}\bar{\varepsilon}^{-5} + (h^{-2}+n)\varepsilon^{-3}] + \frac{B_1\alpha^*}{2}\varepsilon^{-3},$$

$$r_n^4 = -\frac{\lambda}{2}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{m!\,(n-m)!}[\varepsilon^1 + (-1)^{n+1}\bar{\varepsilon}^1]s^{n-m}\sigma^m,$$

где

$$h = e^{i\beta}, \quad \varepsilon^k = e^{i\beta(n-2m+k)}, \quad \bar{\varepsilon}^k = e^{-i\beta(n-2m+k)}.$$

Искомые функции представим аналогично

$$p(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(s)\,\delta^m, \qquad \gamma(s) = \sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m(s)\,\delta^m. \tag{22}$$

Подставляя выражения (20), (21) и (22) в уравнения (17), (18) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mu_m^k(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - s} = \chi_m^k(s) \qquad (k = 1, 2), \tag{23}$$

где

$$\mu_m^1(s) = \overline{p_m(s)}, \quad \mu_m^2(s) = \gamma_m^{-1}(s),$$

$$\chi_0^1(s) = \theta_0(s), \quad \chi_0^2(s) = \varphi_0(s),$$

$$\chi_m^1(s) = \theta_m(s) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{m-1}[\overline{p_{m-j-1}(\sigma)}\,r_j^1(s,\sigma) + p_{m-j-1}(\sigma)\,r_j^2(s,\sigma)]\,d\sigma,$$

$$\chi_m^2(s) = \varphi_m(s) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{m-j-1}(\sigma)\,r_j^4(s,\sigma)\,d\sigma.$$

Решение уравнений (23), неограниченное в точках $s = \pm 1$, имеет вид

$$\mu_m^k(s) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-s^2}}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - s}\chi_m^k(\tau)\,d\tau + C_m^k\right]. \tag{24}$$

Из условия (19) следует, что

$$C_0^1 = C = -\frac{\alpha_1 i}{2\lambda_1}\int_{-1}^{1}\gamma(s)\,ds, \quad C_m^1 = 0 \quad (m > 0), \quad C_m^2 = 0.$$

Определим коэффициенты интенсивности напряжений, когда правая часть уравнения (18) имеет вид

$$\theta(s) = \frac{q}{l}\,\delta(s - s_0),$$

где $\delta(s)$ — дельта-функция Дирака, q — комплексная постоянная. Используя формулы (24) и (16) и ограничиваясь в разложениях (20) и (22) членами порядка δ^5, получаем

$$k_1^* + ik_2^* = \psi(q, \bar{q}) + P,$$

$$\psi(q, \bar{q}) = 2D_1\frac{\sqrt{1-s_0^2}}{\sqrt{\pi l}}\left\{\frac{q}{1 \pm s_0} + g_{11}\delta^2 \pm \left(\frac{1}{2}g_{21} \pm g_{22}s_0\right)\delta^3 + \left(g_{33}s_0^2 \pm\right.\right.$$

$$\left.\pm\frac{1}{2}g_{32}s_0 + g_{31} + g_{33} - g_{11}g_{11}^1 - \bar{g}_{11}g_{11}^2\right)\delta^4 + \left[g_{44}s_0^3 \pm \frac{1}{2}g_{43}s_0^2 + \right.$$

$$+\frac{1}{2}(g_{42} + g_{44} - g_{22}g_{11}^1 - \bar{g}_{22}g_{11}^2)\,s_0 \pm$$

$$\pm \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} g_{41} + g_{43} - g_{11}\overset{1}{g}_{21} - \bar{g}_{11}\overset{2}{g}_{21}\right)\Big]\delta^5\Big\}, \tag{25}$$

$$P = \frac{2CD_1\sqrt{l}}{\sqrt{\pi}}\Big\{\pm 1 + \overset{1}{g}_{00}\delta \mp \frac{1}{2}\overset{*}{g}_{10}\delta^2 - \frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{20} + \overset{*}{g}_{22} - \overset{0}{g}_{11})\,\delta^3 \pm$$

$$\pm \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\overset{*}{g}_{30} - \overset{*}{g}_{32} + \overset{0}{g}_{21}\right)\delta^4 + \frac{1}{4}\Big[-\frac{3}{2}\overset{*}{g}_{40} - \overset{*}{g}_{42} + \overset{0}{g}_{31} + \overset{0}{g}_{11}\overset{1}{g}_{11} -$$

$$- \bar{\overset{0}{g}}_{11}\overset{2}{g}_{11} - \frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{44} - \overset{0}{g}_{33} + \overset{*}{g}_{20}\overset{1}{g}_{11} - \bar{\overset{*}{g}}_{20}\overset{2}{g}_{11} - \overset{*}{g}_{10}\overset{1}{g}_{21} +$$

$$+ \bar{\overset{*}{g}}_{10}\overset{2}{g}_{21} - \overset{*}{g}_{22}\overset{1}{g}_{11} + \bar{\overset{*}{g}}_{22}\overset{2}{g}_{11})\Big]\delta^5\Big\}. \tag{26}$$

Здесь введены обозначения

$$g_{jk} = q\overset{1}{g}_{jk} + \bar{q}\overset{2}{g}_{jk}, \quad \overset{*}{g}_{jk} = \overset{1}{g}_{jk} - \overset{2}{g}_{jk}, \quad \overset{0}{g}_{jk} = \overset{1}{g}_{00}\overset{1}{g}_{jk} - \bar{\overset{1}{g}}_{00}\overset{2}{g}_{jk},$$

$$2\overset{1}{g}_{00} = i\overset{1}{r}_0, \ 8\overset{1}{g}_{10} = A(4 + h^{-2} + 2h^2) + Bh^2, \ 8\overset{1}{g}_{11} = -A(5 + h^2 + h^{-2}) - B,$$

$$4\overset{2}{g}_{10} = -4\overset{2}{g}_{11} = A(1 + h^2),$$

$$8\overset{k}{g}_{20} = i\overset{k}{a}_{20}, \quad 8\overset{k}{g}_{21} = -i\overset{k}{b}_{20}, \quad 8\overset{k}{g}_{22} = i\overset{k}{c}_{20},$$

$$16\overset{k}{g}_{30} = -\overset{k}{a}_{30}, \quad 16\overset{k}{g}_{31} = \overset{k}{b}_{30} + \overset{k}{a}_{31}, \quad 16\overset{k}{g}_{32} = -(\overset{k}{c}_{30} + \overset{k}{b}_{31}), \quad 16\overset{k}{g}_{33} = \overset{k}{c}_{31},$$

$$32\overset{k}{g}_{40} = -i\overset{k}{a}_{40}, \quad 32\overset{k}{g}_{41} = i(\overset{k}{b}_{40} + 2\overset{k}{a}_{41}), \quad 32\overset{k}{g}_{42} = -i(\overset{k}{c}_{40} + 2\overset{k}{b}_{41} +$$

$$+ \overset{k}{a}_{42}), \quad 32\overset{k}{g}_{43} = i(2\overset{k}{c}_{41} + \overset{k}{b}_{42}), \quad 32\overset{k}{g}_{44} = -i\overset{k}{c}_{42}, \quad k = 1, 2.$$

С помощью формул (25), (26) можно вычислить коэффициенты интенсивности напряжений в общем случае, когда правая часть уравнения (18) является произвольной функцией

$$k_1 + ik_2 = \int_{-1}^{1} \psi(\theta(s_0), \overline{\theta(s_0)})\, ds_0 + P.$$

При рассмотрении задачи без учета температуры необходимо положить $P = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Билби Б., Эшелби Дж. Дислокации и теория разрушения.— В кн.: Разрушение. Т. 1. «Мир», М., 1973.
2. Гайвась И. В.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 9. «Наукова думка», К., 1970.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. «Наука», М., 1968.
5. Прусов А. И. Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1972.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1974 г.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Б. Л. Пелех, М. А. Сухорольский

Исходные соотношения. Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину толщиной $2h$, находящуюся под действием температурного поля и статических нагрузок, приложенных к внешним поверхностям. Силовые воздействия представим в виде симметричных p_{i1} и антисимметричных p_{i2} нагрузок