

лей $T \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ\text{C}$ и окончательных остаточных напряжений $\bar{\sigma}_r^0, \bar{\sigma}_\theta^0$ в пластинке после индукционной термообработки при $\rho_0 = 1,35$ для различных значений параметров η и T_0 изображены на рис. 4. Причем сплошными линиями представлены величины, вычисленные для $T_0 = 160^\circ\text{C}$, пунктирными — для $T_0 = 140^\circ\text{C}$, а цифрами 1, 2, 3, обозначены графики, соответствующие $\eta = 0,1; 0,2; 0,3$. Из рисунка видно, что при одноразовой температурной обработке пластинки электроиндуктором до $T_0 = 160^\circ\text{C}$ начальные остаточные напряжения уменьшаются на 6—8%. Повторной термообработкой можно добиться дальнейшего снятия остаточных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. А р я о т т Д. Несколько типичных случаев, в которых вызванные сваркой остаточные напряжения способствовали, по-видимому, разрушению судовых конструкций. ИЛ, М., 1957.
2. Ка м н ю Ф. Влияние остаточных напряжений на работу конструкций. Остаточные напряжения в металлах и металлических конструкциях. ИЛ, М., 1957.
3. Ко в а л е н к о А. Д. Введение в термоупругость. «Наукова думка», К., 1965.
4. Ко л о д и й Б. И., Ч о р н ы й Б. И.— Прикладная механика, 1972, 8, 11.
5. Л а н д а у Л. Д., Л я в ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.
6. Мо с к в и т и н В. В. Пластичность при переменных нагружениях. Изд-во Московского ун-та, М., 1965.
7. Не до се ка А. Я., К а з и м и р о в А. А., П а р х о м е н к о И. В.— Автоматическая сварка, 1972, 8.
8. П о д с т р и г а ч Я. С., Ко л о д и й Б. И.— Прикладная механика, 1970, 6, 12.
9. С м а й т В. Электростатика и электродинамика. ИЛ, М., 1954.
10. С п р а г а г е н В. Остаточные напряжения, являющиеся результатом сварки. ИЛ, М., 1957.
11. G r e e n e T. W., H o l z b a u g A. A. Controlled Low — Temperature Stress Relieving, 11, 171—185, March 1946.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

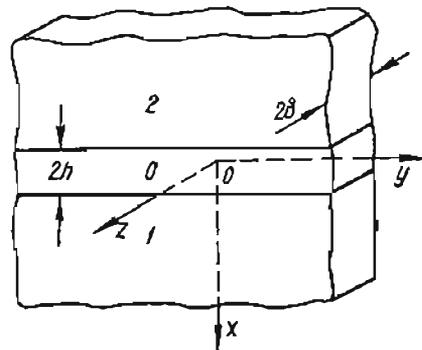
Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

НЕИДЕАЛЬНЫЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЙ КОНТАКТ РАЗНОРОДНЫХ ПЛАСТИНОК

В. С. Попович

Рассмотрим систему двух тонких разнородных изотропных пластин, соединенных встык с помощью промежуточного слоя ширины $2h$ (рисунок). Толщина пластин и промежуточного слоя равна 2δ . Система, имеющая в начальный момент времени $\tau = 0$ температуру t_0 , нагревается внешней средой, температура которой — произвольная функция координат и времени. Величины, относящиеся к промежуточному слою, будем обозначать индексами «0», а величины, относящиеся к пластинкам, — индексами «1» и «2». В предположении квадратичного распределения температуры по толщине пластинки

$$t_1 = \left[1 + \frac{\rho_1^2}{2} \left(\frac{\delta^2}{3} - z^2 \right) \right] T_1$$



для определения нестационарного температурного поля в системе имеем уравнения теплопроводности

$$\rho_1^2 T_1 - \kappa_1^* (T_1 - t_e) = 0 \quad (1)$$

и краевые условия

$$T_0 = T_1 \quad \text{при } x = h, \quad T_0 = T_2 \quad \text{при } x = -h, \quad (2)$$

$$\lambda_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \quad \text{при } x = h, \quad \lambda_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \quad \text{при } x = -h. \quad (3)$$

На торцевых поверхностях системы могут быть заданы условия теплообмена первого, второго или третьего рода. Здесь

$$T_j = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} t_j dz, \quad \rho_j^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{a_j} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \kappa_j^* = \frac{\alpha_j}{1 + \frac{Bi_j}{3}},$$

$\kappa_j = \frac{\alpha_j}{\lambda_j \delta}$, $Bi_j = \frac{\alpha_j \delta}{\lambda_j}$, $a_j = \frac{\lambda_j}{c_p^{(j)}}$ — коэффициенты температуропроводности, λ_j — коэффициенты теплопроводности, $c_p^{(j)}$ — объемные теплоемкости, α_j — коэффициенты теплообмена с плоскостями $z = \pm \delta$; x, y — координаты системы, $j = 0, 1, 2$.

Вызываемые температурным полем, полученным в результате решения краевой задачи теплопроводности для рассматриваемой системы, напряжения и перемещения определяются из соотношений [2]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^{(j)} &= -2G_j \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} + \frac{2G_j}{1-\nu_j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_j \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_{yy}^{(j)} &= -2G_j \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{2G_j}{1-\nu_j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \chi_j}{\partial y^2} + (2+\nu_j) \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_{xy}^{(j)} &= 2G_j \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x \partial y} + \frac{2G_j}{1-\nu_j} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x^2} - \nu_j \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$u_j = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} - \frac{1+\nu_j}{1-\nu_j} \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x \partial y}, \quad v_j = \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{2}{1-\nu_j} \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial y^2} \quad (5)$$

при краевых условиях

$$u_0 = u_1, \quad v_0 = v_1 \quad \text{при } x = h, \quad u_0 = u_2, \quad v_0 = v_2 \quad \text{при } x = -h, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^{(0)} &= \sigma_{xx}^{(1)} \\ \sigma_{xy}^{(0)} &= \sigma_{xy}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x = h, \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^{(0)} &= \sigma_{xx}^{(2)} \\ \sigma_{xy}^{(0)} &= \sigma_{xy}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x = -h, \quad (7)$$

где χ_j — бигармоническая функция, т. е.

$$\Delta \Delta \chi_j = 0, \quad (8)$$

Φ_j — термоупругий потенциал перемещений, являющийся частным решением уравнения

$$\Delta \Phi_j = (1 + \nu_j) \alpha_j^{(j)} T_j, \quad (9)$$

G_j — модули сдвига, ν_j — коэффициенты Пуассона, $\alpha_j^{(j)}$ — температурные коэффициенты линейного расширения сопрягаемых элементов, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Решение уравнения (1) для промежуточного слоя, как пластинки шириной $2h$, с учетом условий (2) имеет вид

$$T_0 = A_0^* \cos \rho_0^* x + B_0^* \sin \rho_0^* x - \frac{\kappa_0^*}{\rho_0^*} \int_{-h}^x t_c(\xi, y, \tau) \sin \rho_0^* (x - \xi) d\xi, \quad (10)$$

где

$$A_0^* = \frac{1}{2 \cos \rho_0^* h} \left[T_1^+ + T_2^- + \frac{\alpha_0^*}{\rho_0^*} \int_{-h}^h t_c(\xi, y, \tau) \sin \rho_0^*(h - \xi) d\xi \right],$$

$$B_0^* = \frac{1}{2 \sin \rho_0^* h} \left[T_1^+ - T_2^- + \frac{\alpha_0^*}{\rho_0^*} \int_{-h}^h t_c(\xi, y, \tau) \sin \rho_0^*(h - \xi) d\xi \right],$$

$$\rho_0^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha_0^*.$$

Здесь и далее при выводе условий неидеального термомеханического контакта под ξ^\pm надо понимать значение величины ξ при $x = \pm h$.

Подставляя решение (10) в (3), получаем следующие условия на поверхностях $x = \pm h$:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^+ = \lambda_0 \rho_0^* (-A_0^* \sin \rho_0^* h + B_0^* \cos \rho_0^* h) -$$

$$- \lambda_0 \alpha_0^* \int_{-h}^h t_c(\xi, y, \tau) \cos \rho_0^*(h - \xi) d\xi, \quad (11)$$

$$\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)^- = \lambda_0 \rho_0^* (A_0^* \sin \rho_0^* h + B_0^* \cos \rho_0^* h).$$

Разлагая входящие в выражения (11) операторы в ряды и ограничиваясь первыми членами разложений, находим такие приближенные условия теплового контакта пластин:

$$\Lambda_0 \frac{\partial^2 (T_1^+ + T_2^-)}{\partial y^2} + 2 \left[\Lambda_1^* \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^+ - \Lambda_2^* \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)^- \right] -$$

$$- \frac{2A_0}{Bi_0^*} (T_1^+ + T_2^-) = C_0 \frac{\partial (T_1^+ + T_2^-)}{\partial \tau} - \frac{4A_0 \theta_c}{Bi_0^*},$$

$$\Lambda_0 \frac{\partial^2 (T_1^+ - T_2^-)}{\partial y^2} + 6 \left[\Lambda_1^* \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^+ + \Lambda_2^* \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)^- \right] -$$

$$- 2 \left(\frac{6}{R_h} + \frac{A_0}{Bi_0^*} \right) (T_1^+ - T_2^-) = C_0 \frac{\partial (T_1^+ - T_2^-)}{\partial \tau} - \frac{4A_0 \theta_c^*}{Bi_0^*}, \quad (12)$$

позволяющие определить температуру на стыке пластин и соединяющего их тонкого промежуточного слоя. Здесь $\Lambda_0 = \lambda_0 F$ — приведенная теплопроводность слоя, $C_0 = c_0^{(0)} F$ — его приведенная теплоемкость, $A_0 = 2\alpha_0 h$ — приведенный коэффициент теплообмена, $\Lambda_i^* = 2\delta \lambda_i$ — приведенные коэффициенты теплопроводности, $R_h = \frac{h}{\lambda_0 \delta}$ — термосопротивление слоя, $F = 4\delta h$,

$$Bi_0^* = 1 + \frac{Bi_0}{3}, \quad \theta_c = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_c(x, y, \tau) dx, \quad \theta_c^* = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h x t_c(x, y, \tau) dx.$$

Умножая условия (10) на R_h и пренебрегая членами, содержащими h^2 , приходим к более простым условиям

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^+ = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)^-, \quad \Lambda_i^* \left(\frac{\partial T_i}{\partial x} \right)^{\pm} = \frac{1}{R_h} (T_1^+ - T_2^-), \quad (13)$$

характеризующимися только контактным термосопротивлением R_h слоя.

Решения уравнений (8), (9) для промежуточного слоя, как пластинки, с учетом условий (6) имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_0 &= (A + Bx) \cos \beta x + (C + Dx) \sin \beta x, \\ \Phi_0 &= \frac{(1 + \nu_0) \alpha_i^{(0)}}{\beta} \int_{-h}^x T_0(\eta, y, \tau) \sin \beta(x - \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(h\beta \cos h\beta + \sin h\beta) D - n_-}{2\beta \sin h\beta}, & C &= \frac{2(h\beta \sin h\beta - \cos h\beta) B - n_+}{2\beta \cos h\beta}, \\ B &= \frac{(1 - \nu_0) M_1}{\beta l_+}, & D &= \frac{(1 - \nu_0) M_2}{\beta l_-}, \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{\partial}{\partial y}, \quad l_{\pm} = 2h\beta(1 + \nu_0) \pm (3 - \nu_0) \sin 2h\beta,$$

$$n_{\pm} = \frac{1 - \nu_0}{(1 + \nu_0)\beta} \left[u_2^- \pm u_1^+ \mp (1 + \nu_0) \alpha_i^{(0)} \int_{-h}^h T_0(\eta, y, \tau) \cos \beta(h - \eta) d\eta \right],$$

$$M_1 = (u_2^- + u_1^+) \sin \beta h + (v_2^- - v_1^+) \cos \beta h - (1 + \nu_0) \alpha_i^{(0)} \int_{-h}^h T_0(\eta, y, \tau) \sin \beta \eta d\eta,$$

$$M_2 = (u_2^- - u_1^+) \cos \beta h - (v_2^- + v_1^+) \sin \beta h + (1 + \nu_0) \alpha_i^{(0)} \int_{-h}^h T_0(\eta, y, \tau) \cos \beta \eta d\eta.$$

Подставляя решения (14) в (4) ($j = 0$) и используя условия (7), получаем следующие условия на поверхностях $x = \pm h$:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(1)+} + \sigma_{xx}^{(2)-} &= -2G_0\beta \left[M_0 - \frac{l_-^* M_2}{l_- \sin h\beta} + \frac{(1 + \nu_0) \beta n_-}{1 - \nu_0} \operatorname{ctg} h\beta \right], \\ \sigma_{xx}^{(1)+} - \sigma_{xx}^{(2)-} &= -2G_0\beta \left[M_0 - \frac{l_+^* M_1}{l_+ \cos h\beta} + \frac{(1 + \nu_0) \beta n_+}{1 - \nu_0} \operatorname{tg} h\beta \right], \quad (15) \\ \sigma_{xy}^{(1)+} + \sigma_{xy}^{(2)-} &= -2G_0\beta \left[\frac{4M_1}{l_+} \cos h\beta - (u_2^- + u_1^+) \right], \\ \sigma_{xy}^{(1)+} - \sigma_{xy}^{(2)-} &= -2G_0\beta \left[\frac{4M_2}{l_-} \sin h\beta + (u_2^- - u_1^+) \right], \end{aligned}$$

где

$$M_0 = (1 + \nu_0) \alpha_i^{(0)} \int_{-h}^h T_0(\eta, y, \tau) \sin \beta(h - \eta) d\eta,$$

$$l_{\pm}^* = 2h\beta(1 + \nu_0) \pm (1 - \nu_0) \sin 2h\beta.$$

Разложив входящие в (15) операторы в ряды и ограничившись членами, содержащими жесткость промежуточного слоя на растяжение — сжатие и его жесткость на изгиб, получим условия неидеального термомеханического контакта в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(1)+} + \sigma_{xx}^{(2)-} &= -\frac{1}{2\delta(1 - \nu_0^2)} \left\{ \left[2E_0 e + \frac{\nu_0 g_0}{2(1 - \nu_0)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(3 - 6\nu_0 - \nu_0^2) g_0^*}{15(1 - \nu_0)^2} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] (u_2^- - u_1^+) - \right. \\ &\quad \left. - 2\delta \nu_0 E_0 \frac{\partial (v_2^- + v_1^+)}{\partial y} + 2\delta(1 + \nu_0) E_0 \alpha_i^{(0)} (T_1^+ + T_2) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(1)+} - \sigma_{xx}^{(2)-} &= -\frac{1}{8\delta(1+\nu_0)} \left\{ \left[g_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu_0)g_0^*}{2} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] (u_2^- + u_1^+) - \right. \\
&\quad \left. - 4\delta E_0 \frac{\partial (v_2^- - v_1^+)}{\partial y} \right\}, \\
\sigma_{xy}^{(1)+} + \sigma_{xy}^{(2)-} &= \frac{1}{8\delta(1+\nu_0)} \left\{ 4\delta E_0 \frac{\partial (u_2^- + u_1^+)}{\partial y} - \left[4E_0 \varepsilon - \frac{(3+\nu_0)g_0}{6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(5\nu_0^2 + 6\nu_0 - 3)g_0^*}{60} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] (v_2^- - v_1^+) + \frac{(1+\nu_0)\alpha_I^{(0)}}{3} \left[g_0 \frac{\partial}{\partial y} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{g_0^*}{2} \left((1-\nu_0) \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial^2}{\partial y \partial \tau} - \kappa_0^* \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] (T_1^+ - T_2^-) \right\}, \quad (16) \\
\sigma_{xy}^{(1)+} - \sigma_{xy}^{(2)-} &= \frac{1}{2\delta(1-\nu_0^2)} \left\{ 2\delta\nu_0 E_0 \frac{\partial (u_2^- - u_1^+)}{\partial y} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{g_0}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{g_0^*}{1-\nu_0} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) (v_2^- + v_1^+) + \frac{(1+\nu_0)\alpha_I^{(0)}}{2} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[g_0 \frac{\partial}{\partial y} + g_0^* \left(\frac{3-\nu_0}{1-\nu_0} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial^2}{\partial y \partial \tau} - \kappa_0^* \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] (T_1^+ + T_2^-) \right\},
\end{aligned}$$

где $g_0 = E_0 F$, $g_0^* = E_0 I$, $F = 4\delta h$, $I = \frac{4}{3} \delta h^3$ — соответственно жесткость промежуточного слоя на растяжение — сжатие, его жесткость на изгиб, его площадь поперечного сечения и момент инерции, E_0 — модуль Юнга слоя, $\varepsilon = \frac{\delta}{h}$.

В случае, когда температура внешней среды не зависит от координаты y , условия (16) запишутся так:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(1)+} + \sigma_{xx}^{(2)-} &= -\frac{2G_0}{\delta(1-\nu_0)} \left[\varepsilon (u_2^- - u_1^+) + \delta(1+\nu_0)\alpha_I^{(0)} (T_1^+ + T_2^-) \right], \\
\sigma_{xx}^{(1)+} - \sigma_{xx}^{(2)-} &= 0, \\
\sigma_{xy}^{(1)+} + \sigma_{xy}^{(2)-} &= -\frac{G_0 \varepsilon}{\delta} (v_2^- - v_1^+), \\
\sigma_{xy}^{(1)+} - \sigma_{xy}^{(2)-} &= 0.
\end{aligned} \quad (17)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», М., 1968.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, М., 1962.
3. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1974 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ТВЕРДОГО РАСТВОРА

Б. М. Гнидец

Система уравнений, описывающая взаимосвязь и протекание механических тепловых, электромагнитных и диффузионных процессов в электропроводных неферромагнитных твердых растворах предложена в работе [4]. В частности, для трехкомпонентного раствора (положительно заряженная решетка: