

## ЛИТЕРАТУРА

1. Грицай С. В., Швец Р. Н. Труды научной конференции «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». «Наукова думка», К., 1974.
2. Гузь А. Н. — Прикладная механика, 1968, 4, 1.
3. Гузь А. Н., Головчан В. Т., Черевко М. А. — Прикладная механика, 1974, 10, 8.

Львовский филиал  
математической физики  
Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
в августе 1974 г.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ СООСНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Р. А. Марчук

Задача о колебании системы, состоящей из соосных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, рассматривалась в работах [1, 2, 4, 5]. В данной статье исследуется распространение осесимметричных волн в системе, состоящей из двух бесконечных цилиндрических оболочек с общей осью симметрии, заполненных акустической жидкостью, причем жидкость, находящаяся между оболочками, по своим физическим характеристикам отличается от жидкости, заполняющей оболочку меньшего радиуса. Движение жидкости предполагается безвихревым, а прогибы оболочки и перемещения частиц жидкости достаточно малы, чтобы рассматриваемую задачу можно было решать в линейной постановке. Индексами «1», «2» обозначим величины, относящиеся к внутренней и внешней оболочкам соответственно, индексом «3» — величины, характеризующие жидкость внутри оболочки меньшего радиуса, а индексом «4» — величины, характеризующие жидкость между оболочками.

Введем цилиндрическую систему координат  $(r_0, \theta_0, x_0)$ , совместив полярную ось  $x_0$  с осью оболочек. Осесимметричное движение ортотропных цилиндрических оболочек будем описывать уравнениями [3], которые учитывают деформацию поперечного сдвига и силы инерции вращения. В безразмерной системе координат  $x = \frac{x_0}{R_1}$ ;  $\theta = \theta_0$ ,  $r = \frac{r_0}{R_1}$ ;  $t = \frac{c_1}{R_1} \tau$  уравнения движения цилиндрических оболочек принимают вид [6]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{v_{21}^{(j)}}{\alpha_j} \frac{\partial w_j}{\partial x} = \sigma_j \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial t^2},$$

$$m_j \left( v_{21}^{(j)} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{1}{\alpha_j} w_j \right) - \frac{k_j^2}{\eta_j} \alpha_j \left( \frac{\partial v_x^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \right) + \alpha_j \sigma_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} = \frac{\alpha_j \sigma_j}{k_j} Z_j,$$

$$\eta_j \left( \frac{\partial^2 v_x^{(j)}}{\partial x^2} - \sigma_j \frac{\partial^2 v_x^{(j)}}{\partial t^2} \right) = v_x^{(j)} + \frac{\partial w_j}{\partial x} \quad (j = 1, 2). \quad (1)$$

При  $j = 1$ ,  $\alpha_1 = \sigma_1 = 1$ ,  $Z_1 = [p_2 - p_4]_{r=1}$  система уравнений (1) описывает движение внутренней оболочки, а при  $j = 2$ ,  $\alpha_2 = \frac{R_2}{R_1}$ ,  $\sigma_2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}$ ,  $Z_2 = [p_4]_{r=R_2}$  — внешней. Здесь введены следующие обозначения:

$$k_j = \frac{2h_j}{R_1}, \quad m_j = \frac{E_2^{(j)}}{E_1^{(j)}}, \quad v_j = \frac{k_j^2 E_1^{(j)}}{k_j' G_{13}^{(j)} (1 - v_{12}^{(j)} v_{21}^{(j)})}, \quad \eta_j = \frac{1}{12} \eta_j.$$

$R_1, R_2$  — радиусы оболочек ( $R_1 < R_2$ ),  $u_j, w_j$  — безразмерные касательные и нормальные перемещения срединной поверхности оболочек, отнесенные к радиусу  $R_1$ ,  $\gamma_x^{(j)}$  — угол поворота нормали,  $c_1, c_2$  — скорости распространения продольных волн в соответствующих оболочках,  $\tau$  — время,  $E^{(j)}$ ,  $E_2^{(j)}$ ,  $\nu_{12}^{(j)}$ ,  $\nu_{21}^{(j)}$  — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона для ортотропного материала,  $2h_j$  — толщина оболочки,  $k_j'$ ,  $G_{13}^{(j)}$  — коэффициенты и модули сдвига материала оболочки,  $\rho_3, \rho_4, P_4$  — безразмерные избыточные давления соответствующих жидкостей.

Величины  $\rho_3, \rho_4, P_4$  определяются по следующим формулам [6]:

$$[\rho_n]_{r=1} = -\delta_n \left[ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} \right]_{r=1} \quad (n = 3, 4),$$

$$[P_4]_{r=\alpha_1} = -\delta_0 \left[ \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} \right]_{r=\alpha_1},$$
(2)

где  $\delta_n = \frac{\rho_n}{\rho_1}$ ,  $\delta_0 = \frac{\rho_4}{\rho_2}$ ,  $\rho_1, \rho_2$  — плотность материала оболочек;  $\rho_3, \rho_4$  — плотности соответствующих жидкостей;  $\varphi_3, \varphi_4$  — безразмерные потенциалы скоростей, описывающие движение этих жидкостей.

Функции  $\varphi_3, \varphi_4$  являются решением таких задач:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu_n^2} \frac{\partial^3 \varphi_n}{\partial t^3},$$

$$\left[ \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} \right]_{r=1} = \frac{\partial \omega_1}{\partial t} \quad (n = 3, 4),$$

$$\left[ \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} \right]_{r=\alpha_1} = \frac{\partial \omega_2}{\partial t}.$$
(3)

Здесь  $\mu_n = \frac{c_n}{c_1}$ ,  $c_n$  — скорость звука в жидкости.

Рассматривая синусоидальные волны, получаем

$$\{u, w, \gamma_x, \varphi\} = \{U, W, \Gamma, \Phi\} \exp[i(\zeta x - \omega t)],$$
(4)

где  $U, W, \Gamma, \Phi$  — безразмерные амплитуды волн,  $\zeta$  — безразмерное волновое число;  $\omega$  — безразмерная круговая частота.

С учетом соотношений (4) и условий ограниченности скоростей на оси цилиндра решением задач (3) являются следующие выражения:

$$\varphi_3 = \frac{I_0(\zeta \beta_1 r)}{\zeta \beta_1 J_1(\zeta \beta_1)} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} \quad (\beta_1^2 > 0),$$

$$\varphi_3 = -\frac{J_0(\zeta \bar{\beta}_1 r)}{\zeta \bar{\beta}_1 J_1(\zeta \bar{\beta}_1)} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} \quad (\beta_1^2 < 0),$$

$$\varphi_4 = \left\{ [I_0(\zeta \beta_2 r) K_1(\zeta \beta_2 \alpha_2) + K_0(\zeta \beta_2 r) I_1(\zeta \beta_2 \alpha_2)] \frac{\partial \omega_1}{\partial t} - [I_0(\zeta \beta_2 r) K_1(\zeta \beta_2) + \right.$$

$$\left. + K_0(\zeta \beta_2 r) I_1(\zeta \beta_2)] \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \right\} \frac{1}{\zeta \beta_2 [I(\zeta \beta_2) K_1(\zeta \beta_2 \alpha_2) - K_1(\zeta \beta_2) I_1(\zeta \beta_2 \alpha_2)]} \quad (\beta_2^2 > 0),$$

$$\varphi_4 = \left\{ [Y_0(\zeta \bar{\beta}_2 r) J_1(\zeta \bar{\beta}_2 \alpha_2) - J_0(\zeta \bar{\beta}_2 r) Y_1(\zeta \bar{\beta}_2 \alpha_2)] \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + [J_0(\zeta \bar{\beta}_2 r) Y_1(\zeta \bar{\beta}_2) - \right.$$

$$\left. - Y_0(\zeta \bar{\beta}_2 r) J_1(\zeta \bar{\beta}_2)] \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \right\} \frac{1}{\zeta \bar{\beta}_2 [J_1(\zeta \bar{\beta}_2) Y_1(\zeta \bar{\beta}_2 \alpha_2) - Y_1(\zeta \bar{\beta}_2) J_1(\zeta \bar{\beta}_2 \alpha_2)]} \quad (\beta_2^2 < 0).$$
(6)

Здесь

$$\beta_j^2 = 1 - \frac{\omega^2}{\zeta^2 \mu_j^2}, \quad \bar{\beta}_j = i\beta_j, \quad i = \sqrt{-1}, \quad j = 1, 2;$$

$J_m(r), I_m(r)$  — функции Бесселя первого рода,  $Y_m(r), K_m(r)$  — функции Бесселя второго рода действительного и мнимого аргументов.

Учитывая соотношения (2), (4) — (6), из системы уравнений (1) получаем трансцендентное уравнение, связывающее безразмерные фазовую скорость  $v$  и круговую частоту  $\omega$ :

$$\begin{aligned}
 & M \left\{ (v^2 - 1) \frac{k_1^2}{\eta_1} \omega^2 v^2 - (v^2 + \eta_1^* \omega^2 - \eta_1^* \omega^2 v^2) \left[ (v^2 - 1) \left( \frac{k_1^2}{\eta_1} \omega^2 - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - v^2 \omega^2 - v^2 \omega^2 q_1 - v^2 \omega^2 q_2 + v^2 m_1 \right) + v^2 m_1 v_{12}^{(1)} v_{21}^{(1)} \right] \right\} + \\
 & + N \left\{ (1 - v^2) (\sigma_2 v^2 - 1) \frac{k_1^2 k_2^2}{\eta_1 \eta_2} \alpha_2 \omega^4 v^4 + (v^2 - 1) (\sigma_2 v^2 - 1) [v^2 + \right. \\
 & + \eta_1^* \omega^2 (1 - v)] \left[ \frac{k_1^2}{\eta_1} \omega^2 - v^2 (\omega^2 + \omega^2 q_1 + \omega^2 q_2 - m_1) \right] \frac{k_2^2}{\eta_2} \alpha_2 \omega^2 v^2 - \\
 & - (v^2 - 1) (\alpha_2 v^2 - 1) [v^2 + \eta_1^* \omega^2 (1 - v^2)] [v^2 + \eta_2^* \omega^2 (1 - \sigma_2 v^2)] q_3 q_4 \alpha_2 \sigma_2 \omega^4 v^4 + \\
 & + (v^2 - 1) [v^2 + \eta_2^* \omega^2 (1 - \sigma_2 v^2)] \frac{k_1^2}{\alpha_2 \eta_1} m_2 v_{12}^{(2)} v_{21}^{(2)} \omega^2 v^4 - \\
 & - \frac{1}{\alpha_2} (v^2 - 1) [v^2 + \eta_1^* \omega^2 (1 - v^2)] [v^2 + \eta_2^* \omega^2 (1 - \sigma_2 v^2)] \left[ \frac{k_1^2}{\eta_1} \omega^2 - \right. \\
 & \quad \left. - v^2 (\omega^2 + \omega^2 q_1 + \omega^2 q_2 - m_1) \right] m_2 v_{12}^{(2)} v_{21}^{(2)} v^2 + \\
 & + (\sigma_2 v^2 - 1) [v^2 + \eta_1^* \omega^2 (1 - v^2)] \frac{k_2^2}{\eta_2} \alpha_2 m_1 v_{12}^{(1)} v_{21}^{(1)} \omega^2 v^4 - \\
 & - \frac{1}{\alpha_2} [v^2 + \eta_1^* \omega^2 (1 - v^2)] [v^2 + \eta_2^* \omega^2 (1 - \sigma_2 v^2)] m_2 m_1 v_{12}^{(1)} v_{12}^{(2)} v_{21}^{(1)} v_{21}^{(2)} v^4 \Big\} = 0, \quad (7)
 \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{\delta_3}{\xi \beta_1 k_1} \frac{I_0(\xi \beta_1)}{I_1(\xi \beta_1)} \quad (\beta_1^2 > 0), \\
 q_1 &= - \frac{\delta_3}{\xi \bar{\beta}_1 k_1} \frac{J_0(\xi \bar{\beta}_1)}{J_1(\xi \bar{\beta}_1)} \quad (\beta_1^2 < 0), \\
 q_2 &= \frac{\delta_4}{a k_1} [I_0(\xi \beta_2) K_1(\alpha_2 \xi \beta_2) + K_0(\xi \beta_2) I_1(\alpha_2 \xi \beta_2)] \operatorname{sign}(\alpha_2 - 1) \quad (\beta_2^2 > 0), \\
 q_2 &= \frac{\delta_4}{b k_1} [Y_0(\xi \bar{\beta}_2) J_1(\alpha_2 \xi \bar{\beta}_2) - J_1(\xi \bar{\beta}_2) Y_1(\alpha_2 \xi \bar{\beta}_2)] \operatorname{sign}(\alpha_2 - 1) \quad (\beta_2^2 < 0), \\
 q_3 &= - \frac{\delta_4}{a k_1} [I_0(\xi \beta_2) K_1(\xi \beta_2) + K_0(\xi \beta_2) I_1(\xi \beta_2)] \quad (\beta_2^2 > 0), \\
 q_3 &= \frac{\delta_4}{b k_1} [J_0(\xi \bar{\beta}_2) Y_1(\xi \bar{\beta}_2) - Y_0(\xi \bar{\beta}_2) J_1(\xi \bar{\beta}_2)] \quad (\beta_2^2 < 0), \\
 q_4 &= \frac{\delta_0}{a k_2} [I_0(\alpha_2 \xi \beta_2) K_1(\alpha_2 \xi \beta_2) + K_0(\alpha_2 \xi \beta_2) I_1(\alpha_2 \xi \beta_2)] \quad (\beta_2^2 > 0), \\
 q_4 &= \frac{\delta_0}{b k_2} [Y_0(\alpha_2 \xi \bar{\beta}_2) J_1(\alpha_2 \xi \bar{\beta}_2) - J_0(\alpha_2 \xi \bar{\beta}_2) Y_1(\alpha_2 \xi \bar{\beta}_2)] \quad (\beta_2^2 < 0), \\
 q_5 &= \frac{\delta_0}{a k_2} [I_0(\alpha_2 \xi \beta_2) K_1(\xi \beta_2) + K_0(\alpha_2 \xi \beta_2) I_1(\xi \beta_2)] \quad (\beta_2^2 > 0), \\
 q_5 &= \frac{\delta_0}{b k_2} [Y_0(\alpha_2 \xi \bar{\beta}_2) J_1(\xi \bar{\beta}_2) - J_0(\alpha_2 \xi \bar{\beta}_2) Y_1(\xi \bar{\beta}_2)] \quad (\beta_2^2 < 0), \\
 a &= \xi \beta_2 [K_1(\xi \beta_2) I_1(\alpha_2 \xi \beta_2) - I_1(\xi \beta_2) K_1(\alpha_2 \xi \beta_2)],
 \end{aligned}$$

$$b = \zeta \bar{\beta}_2 |Y_1(\zeta \bar{\beta}_2) J_1(\alpha_2 \zeta \bar{\beta}_2) - J_1(\zeta \bar{\beta}_2) Y_1(\alpha_2 \zeta \bar{\beta}_2)|,$$

$$M = (\sigma_2 v^2 - 1)(v^2 + \eta_2^* \omega^2 - \eta_2^* \sigma_2 v^2 \omega^2) \left[ \frac{\alpha_2 k_2^2}{\eta_2} \omega^2 - v^2 \left( \alpha_2 \sigma \omega^2 + \alpha_2 \sigma \omega^2 q_2 - \frac{m_2}{\alpha_2} \right) \right],$$

$N$  — «трассер».

Полагая  $M = 1$ ,  $N = 0$ , из соотношения (7) получаем дисперсионное уравнение

$$(v^2 - 1) \frac{k_1^2}{\eta_1^2} \omega^2 v^2 - (v^2 + \eta_1^* \omega^2 - \eta_1^* \omega^2 v^2) \left[ (v^2 - 1) \left( \frac{k_1^2}{\eta_1} \omega^2 - v^2 \omega^2 - v^2 \omega^2 q_1 - v^2 \omega^2 q_2 + v^2 m_1 \right) + v^2 m_1 v_{12}^{(1)} v_{21}^{(1)} \right] = 0, \quad (8)$$

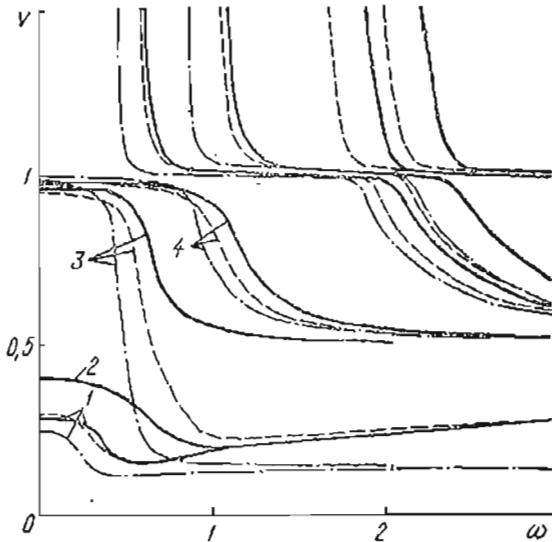


Рис. 1.

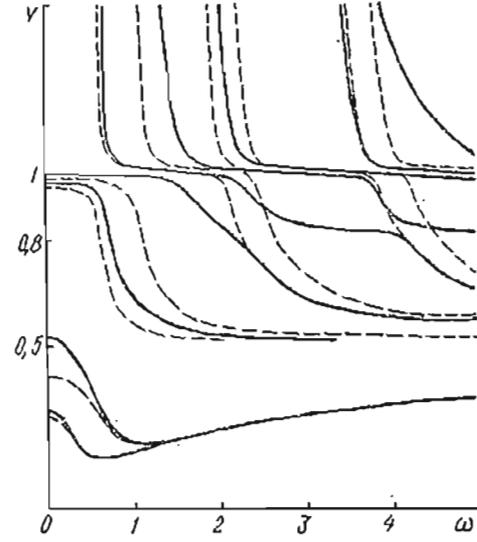


Рис. 2.

которое описывает колебания цилиндрической оболочки в жидкости в случае, когда внешняя оболочка является абсолютно жесткой. При  $q_1 = 0$  из уравнения (8) получим результат работы [6].

Для основного (нулевого) типа колебаний в случае коротких волн ( $\omega \rightarrow \infty$ ) уравнение (7) упрощается к виду

$$\sqrt{\mu_1^2 - v^2} \sqrt{\mu_2^2 - v^2} (1 - v^2)^2 (1 - \sigma_2 v^2)^2 \left( \frac{k_2^2}{\eta_2} - \sigma_2 v^2 \right) \left( \frac{k_1^2}{\eta_1} - v^2 \right) = 0. \quad (9)$$

Обозначим меньшую из величин  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  через  $\mu$ . Если одна из величин  $\frac{k_1}{\sqrt{\eta_1}}$ ,  $\frac{k_2}{\sqrt{\sigma_2 \eta_2}}$  будет меньше  $\mu$ , то из уравнения (9) следует, что асимптотой для нулевого типа колебаний будет служить одна из прямых  $v = \frac{k_1}{\sqrt{\eta_1}}$  или  $v = \frac{k_2}{\sqrt{\sigma_2 \eta_2}}$ , либо обе, когда  $\frac{k_2}{\sqrt{\eta_1}}$  и  $\frac{k_2}{\sqrt{\sigma_2 \eta_2}}$  будут меньше  $\mu$  одновременно. Если  $\frac{k_1}{\sqrt{\eta_1}}$  и  $\frac{k_2}{\sqrt{\eta_2}}$  больше  $\mu$ , то асимптотой для нулевого типа колебаний будет прямая  $v = \mu$ .

На рис. 1, 2 приведены дисперсионные кривые, когда обе оболочки являются либо изотропными ( $m = 1$ ,  $v_{12} = v_{21} = v = 0,3$ ,  $E = 2G_{13}(1 + \nu)$ ), либо ортотропными ( $m = 0,5$ ;  $v_{12} = 0,3$ ,  $v_{21} = 0,15$ ,  $E_1 = 40G_{13}$ ). Расчеты проводились на ЭВМ «Минск-32» при таких общих параметрах для оболочек и жидкостей:  $\alpha_2 = 2$ ;  $\sigma_2 = 1$ ,

$$\frac{h_1}{R_1} = \frac{h_2}{R_2} = \frac{1}{16}, \quad \frac{\rho_3}{\rho_1} = \frac{\rho_4}{\rho_1} = \frac{\rho_4}{\rho_2} = \frac{1}{7,8}.$$

Сплошные линии на рис. 1 отвечают случаю, когда жидкость находится между изотропными оболочками и внутри меньшей оболочки, причем скорости звука в жидкостях одинаковы ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0,5$ ). В рассматриваемом диапазоне частот наблюдается два нулевых (кривые 1, 2) и два первых (кривые 3, 4) типа колебаний, фазовые скорости которых всегда меньше единицы. Кривые последующих типов колебаний располагаются также попарно, причем с увеличением частоты соответствующие пары дисперсионных кривых сближаются между собой. Скорости распространения волн для нулевых типов колебаний с ростом частоты совпадают. Как и в случае одной изотропной оболочки [6, 7], скорость распространения волн нулевого типа нигде не превышает величины  $\mu$ , а скорости волн остальных типов кривых не становятся меньше  $\mu$ , т. е. прямая  $v = \mu$  служит асимптотой для всех дисперсионных кривых.

Штриховые линии на рис. 1 соответствуют решению задачи для случая, когда жидкость находится только между изотропными оболочками. В отличие от предыдущего здесь имеем только один нулевой (кривая 1) тип колебаний, а поведения дисперсионных кривых первого типа колебаний качественно отличаются между собой. Таким образом, наличие жидкости внутри меньшей оболочки значительно влияет на волновые колебания системы.

Штрихпунктирными линиями указаны дисперсионные кривые для случая, когда материал оболочек обладает ортотропными свойствами; жидкость находится только между оболочками. В рассматриваемом диапазоне частот ортотропия материала оболочек значительно влияет на величины фазовых скоростей, причем на поведения дисперсионных кривых нулевого типа колебаний существенно влияет отношение  $\frac{E_1}{G_{13}}$ , а кривых высших типов колебаний — величина  $m = \frac{E_2}{E_1}$ . Для нулевого типа колебаний ортотропных оболочек, как следует из уравнения (9) и рис. 1, асимптотой является прямая  $v = \frac{k}{\sqrt{\eta}}$ .

Сплошными линиями на рис. 2 показаны дисперсионные кривые для изотропных оболочек в случае, когда скорости прохождения звука в жидкостях различны ( $\mu_1 = 0,8$ ,  $\mu_2 = 0,5$ ), а штриховыми — когда скорости одинаковы ( $\mu_1 = \mu_2 = 0,5$ ). Как следует из этого рисунка, различие свойств жидкостей на нулевые и первые типы колебаний влияет только при низких частотах. Для последующих типов колебаний качественное различие поведения кривых наблюдается при фазовых скоростях, близких к  $\mu_1 = 0,8$ .

Таким образом, наличие жидкости, которая занимает пространство внутри и между оболочками, различие в акустических свойствах жидкостей, анизотропия материала оболочек существенно влияют на величины фазовых скоростей и типы колебаний системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев Ю. Г.— Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. «Наука», М., 1970.
2. Балакирев Ю. Г.— Механика твердого тела, 1968, 3.
3. Лунь Е. И., Швец Р. Н.— В кн.: Распространение упругих и упругопластических волн. «Наука» КазССР, Алма-Ата, 1973.
4. Мурзаханов Г. Х., Самсонов Ю. П., Тихонов В. А.— Труды Московского энерг. ин-та, 1972, 101.
5. Семешкин В. П.— Труды Московского высшего технического училища, 1972, 152.
6. Швец Р. Н., Марчук Р. А.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 1. «Наукова думка», К., 1975.
7. Lip T. C., Morgan C. W.—J. Acoustical Society America, 1956, 28, 6.

Львовский филиал  
математической физики  
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
в сентябре 1974 г.