

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. «Наука», М., 1971.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
3. Kaliski S.— Proc. Vib. Problems, 1965, 6, 3.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1974 г.

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ С КОЛЬЦОМ РАВНЫХ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

Р. Н. Швец, С. В. Грицай

Рассмотрим установившиеся изгибные колебания бесконечной трансверсально-изотропной пластинки толщины $2h$ с кольцом равных круговых отверстий, центры которых периодически размещены по окружности радиуса b (см. рисунок). В центре каждого отверстия поместим полюс полярной системы координат (r_k, θ_k) ($k = 0, 1, \dots, m - 1$). Граничные условия на контурах L_k будем считать циклически симметричными [2].

Задача состоит в отыскании в области S , занимаемой пластинкой, решений уравнений движения [1]

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \left(\Delta \tilde{w} - \frac{1}{c_3^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tau^2} \right) + \frac{3}{h^2 c_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tau^2} = \frac{3(1-\nu)}{2h^2 G} P,$$

$$\Delta \varphi - \left(k^2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \varphi = 0, \quad (1)$$

которые учитывают поперечные сдвиговые деформации и инерцию вращения, когда на контурах $(r_k = R) L_k$ заданы условия

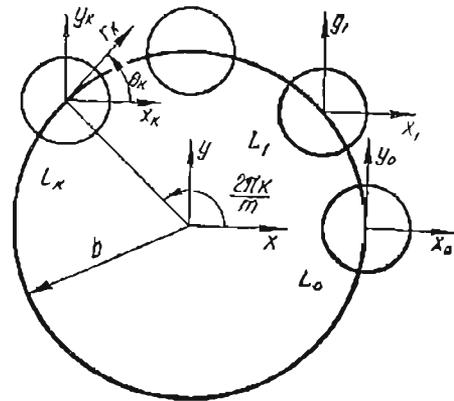
$$M_r^{(k)} = M_r^0 e^{-i\omega_0 \tau}, \quad M_{r\theta}^{(k)} = M_{r\theta}^0 e^{-i\omega_0 \tau}, \quad N_r^{(k)} = N_r^0 e^{-i\omega_0 \tau}. \quad (2)$$

Здесь $c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$, $c_2^2 = \frac{G}{\rho}$, $c_3^2 = \frac{k'G_2}{\rho}$, $k^2 = \frac{2}{b(1-\nu)}$, $e = \frac{Eh^2}{3k'(1-\nu^2)G_2}$, $\Delta_1 = \Delta - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$, $w = \tilde{w} - e\Delta_1 \tilde{w}$ — прогиб, φ — функция сдвига, P — внешняя нагрузка, E, G — модули Юнга и сдвига в плоскости пластинки, G_2 — модуль сдвига в направлении, перпендикулярном к плоскости пластинки, Δ — двумерный оператор Лапласа, k' — коэффициент сдвига, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность, ω_0 — круговая частота, τ — время.

Моменты и перерезывающие усилия в рассматриваемой пластинке определяются формулами

$$M_r^{(k)} = -D \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r_k^2} + \nu \Delta \tilde{w} - (1-\nu) \left(\frac{1}{r_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_k \partial \theta_k} - \frac{1}{r_k^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_k} \right) \right],$$

$$M_\theta^{(k)} + M_\delta^{(k)} = -D(1+\nu) \Delta \tilde{w},$$



$$M_{r\theta}^{(k)} = -D \left[(1-\nu) \left(\frac{1}{r_k} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r_k \partial \theta_k} - \frac{1}{r_k^2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta_k} \right) - \frac{1}{2} \Delta \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_k^2} \right], \quad (3)$$

$$N_r^{(k)} = -D \left[\frac{\partial}{\partial r_k} \Delta_1 \tilde{w} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{r_k} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_k} \right], \quad N_\theta^{(k)} = -D \left[\frac{1}{r_k} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \Delta_1 \tilde{w} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r_k} \right],$$

где D — цилиндрическая жесткость на изгиб.

Рассматривая установившиеся колебания пластинки, функции \tilde{w} , φ , P выбираем в виде

$$\tilde{w} = \tilde{w}_0(x, y) e^{-i\omega_0 \tau}, \quad \varphi = \Phi(x, y) e^{-i\omega_0 \tau}, \quad P = P_0(x, y) e^{-i\omega_0 \tau}. \quad (4)$$

Подставляя формулы (4) в (1), сводим задачу динамического изгиба пластинки к решению уравнений

$$\begin{aligned} (\Delta + \alpha^2)(\Delta \tilde{w}_0 - \beta^2 \tilde{w}_0) &= \frac{3(1-\nu)}{2h^3} \frac{P_0}{G}, \\ \Delta \Phi - \gamma^2 \Phi &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha^2, \beta^2 &= \frac{\omega}{2} \sqrt{\omega^2 (1 + c_0^2)^2 + 4c_0^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \omega^2 \right) \pm \frac{\omega^2}{2} (1 + c_0^2)}, \\ \gamma^2 &= \frac{2}{\varepsilon(1-\nu)} (1 - \varepsilon \omega^2), \quad \omega = \frac{\omega_0}{c_1}, \quad c_0 = \frac{c_1}{c_3}. \end{aligned}$$

Частное решение первого уравнения (5) можно записать так:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_0^* &= \frac{3(1-\nu)}{4\pi h^3 G (\alpha^2 + \beta^2)} \int_{(S)} P_0(x, y) \{ K_0[\alpha \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}] + \\ &\quad + K_0[\beta \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}] \} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (6)$$

где $K_0(z)$ — фундаментальное решение уравнения (5).

Решения однородных уравнений (5) для m -связной области S , удовлетворяющие условиям периодичности и излучения, возьмем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 &= \sum_{\rho=0}^{\infty} a_\rho \sum_{k=0}^{m-1} H_\rho^{(1)}(\alpha r_k) \cos \rho \left(\theta_k - \frac{2\pi k}{m} \right), \\ \tilde{w}_2 &= \sum_{\rho=0}^{\infty} b_\rho \sum_{k=0}^{m-1} K_\rho(\beta r_k) \cos \rho \left(\theta_k - \frac{2\pi k}{m} \right), \\ \Phi &= \sum_{\rho=0}^{\infty} c_\rho \sum_{k=0}^{m-1} K_\rho(\gamma r_k) \sin \rho \left(\theta_k - \frac{2\pi k}{m} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\tilde{w}_0 = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$, a_ρ , b_ρ , c_ρ — неизвестные постоянные, $H_\rho^{(1)}(z)$, $K_\rho(z)$ — цилиндрические функции.

Потенциалами \tilde{w}_1 , Φ описываются соответственно медленные, быстрые и сдвиговые волны, являющиеся дисперсионными, поскольку волновые числа α , β , γ зависят от частот. Из условия периодичности следует, что граничным условиям необходимо удовлетворять только на контуре L_0 основного отверстия; при этом на контурах других отверстий граничные условия будут удовлетворяться автоматически.

Запишем решения (7) при $r_0 < 2b \sin \frac{\pi k}{m}$ в системе координат (r_0, θ_0) , связанной с основным отверстием. На основании теоремы сложения для цилиндрических функций и тождества

$$\sum_{k=0}^{m-1} K_{\rho \pm n}(\alpha_i \delta_k) \sin \pi \left[(n \pm \rho) \left(\frac{1}{2} + \frac{k}{m} \right) \mp \frac{2k\rho}{m} \right] \equiv 0,$$

где m, n, p — целые числа, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n H_n^{(1)}(\alpha r_0) + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p J_n(\alpha r_0) \sum_{k=1}^{m-1} [\cos \pi N H_{p+n}^{(1)}(\alpha \delta_k) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \cos \pi M H_{p-n}^{(1)}(\alpha \delta_k)] \right\} \cos n \theta_0, \\ \tilde{\omega}_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ b_n K_n(\beta r_0) + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p b_p I_n(\beta r_0) \sum_{k=1}^{m-1} [\cos \pi N K_{p+n}(\beta \delta_k) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \pi M K_{p-n}(\beta \delta_k)] \right\} \cos n \theta_0, \\ \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ c_n K_n(\gamma r_0) + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} c_p J_n(\gamma r_0) \sum_{k=1}^{m-1} [\cos \pi N H_{p+n}^{(1)}(\gamma \delta_k) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \pi M H_{p-n}^{(1)}(\gamma \delta_k)] \right\} \sin n \theta_0,\end{aligned}\quad (8)$$

где обозначено:

$$N = (n+p) \left(\frac{1}{2} + \frac{k}{m} \right) - \frac{2kp}{m}, \quad M = (n-p) \left(\frac{1}{2} + \frac{k}{m} \right) + \frac{2kp}{m}, \\ \delta_k = 2b \sin \frac{\pi k}{m}.$$

Подставив решение (8) в граничные условия (2), получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}a_n \chi_{n,1} + b_n \xi_{n,1} + c_n \eta_{n,1} + L_n^{(1)} \chi_{n,2} + Q_n^{(1)} \xi_{n,2} + S_n^{(1)} \eta_{n,1} &= f_n, \\ a_n \chi_{n,3} + b_n \xi_{n,3} + c_n \eta_{n,3} + L_n^{(1)} \chi_{n,4} + Q_n^{(1)} \xi_{n,4} + S_n^{(1)} \eta_{n,4} &= p_n, \\ a_n \chi_{n,5} + b_n \xi_{n,5} + c_n \eta_{n,5} + L_n^{(1)} \chi_{n,6} + Q_n^{(1)} \xi_{n,6} + S_n^{(1)} \eta_{n,6} &= q_n.\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\chi_{n,1} &= \left(n^2 - n - \frac{\alpha^2 R^2}{1-\nu} \right) H_n^{(1)}(\alpha R) + \alpha R H_{n+1}^{(1)}(\alpha R), \\ \xi_{n,1} &= \left(n^2 - n + \frac{\beta^2 R^2}{1-\nu} \right) K_n(\beta R) + \beta R K_{n+1}(\beta R), \\ \eta_{n,1} &= (n - n^2) K_n(\gamma R) + n \gamma R K_{n+1}(\gamma R), \\ \chi_{n,2} &= \left(n^2 - n - \frac{\alpha^2 R^2}{1-\nu} \right) J_n(\alpha R) + \alpha R J_{n+1}(\alpha R), \\ \xi_{n,2} &= \left(n^2 - n + \frac{\beta^2 R^2}{1-\nu} \right) I_n(\beta R) - \beta R I_{n+1}(\beta R), \\ \eta_{n,2} &= (n^2 - n) I_n(\gamma R) + n \gamma R I_{n+1}(\gamma R), \\ \chi_{n,3} &= (n - n^2) H_n^{(1)}(\alpha R) + n \alpha R H_{n+1}^{(1)}(\alpha R), \\ \xi_{n,3} &= (n - n^2) K_n(\beta R) + n \beta R K_{n+1}(\beta R), \\ \eta_{n,3} &= \left(n^2 - n + \frac{\gamma^2 R^2}{2} \right) K_n(\gamma R) + \gamma R K_{n+1}(\gamma R), \\ \chi_{n,4} &= (n - n^2) J_n(\alpha R) + n \alpha R J_{n+1}(\alpha R), \\ \xi_{n,4} &= (n - n^2) I_n(\beta R) - n \beta R I_{n+1}(\beta R), \\ \eta_{n,4} &= - \left[\left(n^2 - n + \frac{\gamma^2 R^2}{2} \right) I_n(\gamma R) - \gamma R I_{n+1}(\gamma R) \right], \\ \chi_{n,5} &= \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \alpha^2 \right) [n H_n(\alpha R) - \alpha R H_{n+1}(\alpha R)], \\ \xi_{n,5} &= \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} + \beta^2 \right) [n K_n(\beta R) - \beta R K_{n+1}(\beta R)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{n,5} &= -\frac{n}{\varepsilon} K_n(\gamma R), \\ \chi_{n,6} &= \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \alpha^2\right) [nJ_n(\alpha R) - \alpha R J_{n+1}(\alpha R)], \\ \xi_{n,6} &= \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} + \beta^2\right) [nI_n(\beta R) + \beta R I_{n+1}(\beta R)], \\ \eta_{n,6} &= \frac{n}{\varepsilon} I_n(\gamma R),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_n^{(1)} &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p \sum_{k=1}^{m-1} [\cos \pi N \cdot H_{p+n}^{(1)}(\alpha \delta_k) + (-1)^n \cos \pi M \cdot H_{p-n}^{(1)}(\alpha \delta_k)], \\ Q_n^{(1)} &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p b_p \sum_{k=1}^{m-1} [\cos \pi N \cdot K_{p+n}(\beta \delta_k) + \cos \pi M \cdot K_{p-n}(\beta \delta_k)], \\ S_n^{(1)} &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p c_p \sum_{k=1}^{m-1} [\cos \pi N \cdot K_{p+n}(\gamma \delta_k) - \cos \pi M \cdot K_{p-n}(\gamma \delta_k)].\end{aligned}$$

В случае, когда внешняя нагрузка отсутствует ($P = 0$),

$$f_0 = \frac{M_{r_0}^0 R^2}{D(1-\nu)}, \quad p_0 = \frac{M_{r_0}^0 R^2}{D(1-\nu)}, \quad q_0 = \frac{N_{r_0}^0 R}{D}; \quad f_n = p_n = q_n = 0,$$

если $n \geq 1$.

Заметим, что при $n = 0$ в системе (9) остается первое и третье уравнения, а со второго непосредственно определяется постоянная c_0 . Бесконечную систему (9) линейной заменой неизвестных [3] можно преобразовать в систему с определителем нормального типа. Вследствие этого приближенное решение указанной системы можно искать методом редукции.

Изгибающие моменты и перерезывающие усилия в системе координат, связанной с основным отверстием пластинки, определяем по формулам

$$\begin{aligned}M_\theta &= \frac{D(1-\nu)}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \left[\left(n^2 - n + \frac{\nu \alpha^2 r_0^2}{1-\nu} \right) H_n^{(1)}(\alpha r_0) + \alpha r_0 H_{n+1}^{(1)}(\alpha r_0) \right] + \right. \\ &\quad \left. + b_n \left[\left(n^2 - n - \frac{\nu \beta^2 r_0^2}{1-\nu} \right) K_n(\beta r_0) + \beta r_0 K_{n+1}(\beta r_0) \right] + \right. \\ &\quad \left. + c_n \eta_{n,1} + L_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n + \frac{\nu \alpha^2 r_0^2}{1-\nu} \right) J_n(\alpha r_0) + \alpha r_0 J_{n+1}(\alpha r_0) \right] + \right. \\ &\quad \left. + Q_n^{(1)} \left[\left(n^2 - n - \frac{\nu \beta^2 r_0^2}{1-\nu} \right) I_n(\beta r_0) - \beta r_0 I_{n+1}(\beta r_0) \right] + S_n^{(1)} \eta_{n,2} \right\}, \quad (10) \\ N_0 &= \frac{D}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \alpha^2 \right) n H_n^{(1)}(\alpha r_0) + b_n \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} + \beta^2 \right) n K_n(\beta r_0) - \right. \\ &\quad \left. - c_n \frac{1}{\varepsilon} [n K_n(\gamma r_0) - \gamma r_0 K_{n+1}(\gamma r_0)] + L_n^{(1)} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \alpha^2 \right) n J_n(\alpha r_0) + \right. \\ &\quad \left. + Q_n^{(1)} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} + \beta^2 \right) n I_n(\beta r_0) + S_n^{(1)} \frac{1}{\varepsilon} [n I_n(\gamma r_0) + \gamma r_0 I_{n+1}(\gamma r_0)] \right\}.\end{aligned}$$

Из анализа формул (10) следует, что установившиеся динамические напряжения в пластинке зависят от частоты возмущающей силы, анизотропных свойств материала по толщине пластинки и от расстояния между отверстиями.

В заключение отметим, что аналогично решается задача о колебании ограниченной круговой пластинки с кольцом равных круговых отверстий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грицай С. В., Швец Р. Н. Труды научной конференции «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». «Наукова думка», К., 1974.
2. Гузь А. Н. — Прикладная механика, 1968, 4, 1.
3. Гузь А. Н., Головчан В. Т., Черевко М. А. — Прикладная механика, 1974, 10, 8.

Львовский филиал
математической физики
Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в августе 1974 г.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ СООСНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Р. А. Марчук

Задача о колебании системы, состоящей из соосных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, рассматривалась в работах [1, 2, 4, 5]. В данной статье исследуется распространение осесимметричных волн в системе, состоящей из двух бесконечных цилиндрических оболочек с общей осью симметрии, заполненных акустической жидкостью, причем жидкость, находящаяся между оболочками, по своим физическим характеристикам отличается от жидкости, заполняющей оболочку меньшего радиуса. Движение жидкости предполагается безвихревым, а прогибы оболочки и перемещения частиц жидкости достаточно малы, чтобы рассматриваемую задачу можно было решать в линейной постановке. Индексами «1», «2» обозначим величины, относящиеся к внутренней и внешней оболочкам соответственно, индексом «3» — величины, характеризующие жидкость внутри оболочки меньшего радиуса, а индексом «4» — величины, характеризующие жидкость между оболочками.

Введем цилиндрическую систему координат (r_0, θ_0, x_0) , совместив полярную ось x_0 с осью оболочек. Осесимметричное движение ортотропных цилиндрических оболочек будем описывать уравнениями [3], которые учитывают деформацию поперечного сдвига и силы инерции вращения. В безразмерной системе координат $x = \frac{x_0}{R_1}$; $\theta = \theta_0$, $r = \frac{r_0}{R_1}$; $t = \frac{c_1}{R_1} \tau$ уравнения движения цилиндрических оболочек принимают вид [6]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{v_{21}^{(j)}}{\alpha_j} \frac{\partial w_j}{\partial x} = \sigma_j \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial t^2},$$

$$m_j \left(v_{21}^{(j)} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{1}{\alpha_j} w_j \right) - \frac{k_j^2}{\eta_j} \alpha_j \left(\frac{\partial v_x^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \right) + \alpha_j \sigma_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} = \frac{\alpha_j \sigma_j}{k_j} Z_j,$$

$$\eta_j \left(\frac{\partial^2 v_x^{(j)}}{\partial x^2} - \sigma_j \frac{\partial^2 v_x^{(j)}}{\partial t^2} \right) = v_x^{(j)} + \frac{\partial w_j}{\partial x} \quad (j = 1, 2). \quad (1)$$

При $j = 1$, $\alpha_1 = \sigma_1 = 1$, $Z_1 = [p_2 - p_4]_{r=1}$ система уравнений (1) описывает движение внутренней оболочки, а при $j = 2$, $\alpha_2 = \frac{R_2}{R_1}$, $\sigma_2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}$, $Z_2 = [p_4]_{r=R_2}$ — внешней. Здесь введены следующие обозначения:

$$k_j = \frac{2h_j}{R_1}, \quad m_j = \frac{E_2^{(j)}}{E_1^{(j)}}, \quad v_j = \frac{k_j^2 E_1^{(j)}}{k_j' G_{13}^{(j)} (1 - v_{12}^{(j)} v_{21}^{(j)})}, \quad \eta_j = \frac{1}{12} \eta_j.$$