МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ И ДЖОУЛЕВО ТЕПЛО В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

В. Ф. Кондрат

Для использования явлений магнитоупругости при обработке материалов [1], в дефектоскопии [7] и других областях необходимо исследование механических, электромагнитных и тепловых полей, возникающих в электропроводных упругих телах в магнитном поле под влиянием силовых, электромагнитных и других внешних воздействий. В работах [2, 9, 11] решались задачи магнитоупругости для полубесконечного электропроводного тела при равномерно распределенном силовом нагружении на его поверхности. Целью настоящей работы является решение плоской задачи магнитоупругости и определение джоулева тепла для полубесконечного электропроводного упругого тела в поперечном магнитном поле в случае пространственно периодического гармонического во времени силового нагружения, заданного на его поверхности.

Пусть на границе $y = 0$ полубесконечного упругого электропроводного изотропного тела, занимающего полупространство $y > 0$, граничащего с вакуумом и помещенного в однородное магнитное поле с z-составляющей индукции $\vec{B}_0$ задано силовое нагружение с y-составляющей $f_1(x)e^{i\omega t}$ и x-составляющей $f_2(x)e^{i\omega t}$, где ω — циклическая частота.

При решении поставленной задачи исходим из системы линеаризованных уравнений магнитоупругости в пренебрежении токами смещения в теле [5], которая в нашем случае записывается в виде

$$\begin{gathered}
-\omega^2\vec{u} = c_t^2\Delta\vec{u} + (c_l^2 - c_t^2)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \frac{1}{\rho}[\vec{j}, \vec{B}_0],\\
\mathrm{rot}\,\vec{E} = -i\omega\vec{b}, \quad \mathrm{rot}\,\vec{b} = \mu\vec{j}, \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + i\omega[\vec{u}, \vec{B}_0]);\\
\mathrm{rot}\,\vec{E}_0 = -i\omega\vec{b}_0, \quad \mathrm{rot}\,\vec{b}_0 = -i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{E}_0;\\
\mathrm{div}\,\vec{b} = 0; \quad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{b}_0 = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{E}_0 = 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где $\vec{u} = (u_x, y_y, 0)$ — вектор перемещения, $\vec{E}$ — напряжение электрического поля в среде, $\vec{B} = (0, 0, b)$ — индукция возмущенного магнитного поля в среде, а $\vec{E}_0$, $\vec{b}_0 = (0, 0, b_0)$ — эти же величины в вакууме, $\vec{j}$ — плотность тока, σ — электропроводность, μ — магнитная проницаемость среды, μ_0 — и ε_0 — магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума, c_l и c_t — скорости продольной и поперечной звуковых волн, ρ — плотность среды.

Для неферромагнитных тел ($\mu \approx \mu_0$) тензоры напряжений Максвелла в теле и вакууме практически равны на границе $y = 0$ и граничные условия для вектора $\vec{u}$ и электродинамических величин на этой поверхности записываются в виде

$$\sigma_{yy} = f_1(x)e^{i\omega t}, \quad \sigma_{xy} = f_2(x)e^{i\omega t}, \quad b = b_0, \quad \frac{1}{\sigma\mu_0}\frac{\partial b}{\partial y} - i\omega B_0 u_y = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial b_0}{\partial y}, \tag{2}$$

где $\sigma_{ik} = 2\rho c_t^2 e_{ik} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2)e_{ll}\delta_{ik}$ — составляющие тензора напряжений в теле, e_{ik} — составляющие тензора деформаций.

Представляя вектор перемещения в виде

$$\vec{u} = \mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{rot}\,(\psi\vec{e}_z), \tag{3}$$

где $\vec{e}_z$ — орт по оси z, из системы (1) получаем систему уравнений

$$\Delta\psi + \Omega_t^2\psi = 0,$$

$$\Delta\varphi + \Omega_l^2\varphi = \frac{s}{c_l\sqrt{\rho\mu_0}}\, b,$$

$$\Delta b - \chi^2\Omega_l^2(1+s^2)\, b = -\chi^2 s c_l\sqrt{\rho\mu_0}\,\Omega_l^4\varphi,$$

$$\Delta b_0 + \omega^2\varepsilon_0\mu_0 b_0 = 0, \tag{4}$$

где $\Omega_l = \frac{\omega}{c_l}$, $\Omega_t = \frac{\omega}{c_t}$, $s^2 = \frac{B_0^2}{\rho\mu_0 c_l^2}$, $\chi^2 = i\frac{\omega\sigma\mu_0}{\Omega_l^2}$. Решая эти уравнения методом интегрального преобразования Фурье и используя выражения (2) и (3), для трансформант Фурье величин u_x, u_y, b и b_0 получаем следующие выражения:

$$\bar{u}_x(\xi,\ y,\ t) = \Gamma^{-1}\sum_{j,m=1}^{2}\left[(-1)^{m+j} i\xi^j a_m D_m^j \bar{F}_j e^{-y\Lambda_{3-m}} - \Lambda_3 A_m \bar{F}_m e^{-y\Lambda_3}\right] e^{i\omega t}, \tag{5}$$

$$\bar{u}_y(\xi,\ y,\ t) = \Gamma^{-1}\sum_{j,m=1}^{2}\left[(-1)^{m+j}\xi^{j-1} a_m D_m^j \bar{F}_j e^{-y\Lambda_{3-m}}\Lambda_{3-m} - i\xi A_m \bar{F}_m e^{-y\Lambda_3}\right] e^{i\omega t}, \tag{6}$$

$$\bar{b}(\xi,\ y,\ t) = \Gamma^{-1}\sum_{j,m=1}^{2}(-1)^{m+j}\xi^{m-1} D_m^j \bar{F}_j e^{-y\Lambda_{3-m}+i\omega t}, \tag{7}$$

$$b_0(\xi,\ y,\ t) = \Gamma^{-1}\sum_{j,m=1}^{2}(-1)^{m+j}\xi^{j-1} D_m^j \bar{F}_j e^{y\Lambda_4+i\omega t}. \tag{8}$$

Здесь

$$D_m^1 = \omega B_0\left[-2i\xi^2\omega B_0\Lambda_m a_{3-m} + (2\xi^2 - \Omega_t^2)\left(\Lambda_m\frac{\xi^2 - \Lambda_{3-m}^2}{\sigma\mu_0\Omega_l^2} + \frac{\Lambda_4}{i\omega\varepsilon_0\mu_0}\right)\right], \tag{9}$$

$$D_m^2 = \omega B_0\left\{\omega B_0\left[(2\beta^2-1)\xi^2 + \Lambda_m\right] a_{3-m} + 2i\beta^2\Lambda_3\left[\Lambda_m\frac{\xi^2 - \Lambda_{3-m}^2}{\sigma\mu_0\Omega_l^2} + \frac{\Lambda_4}{i\omega\varepsilon_0\mu_0}\right]\right\},\qquad m = 1,\ 2, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 2i\xi\omega B_0\sum_{m=1}^{2}(-1)^m\left[\frac{\Lambda_4}{i\omega\varepsilon_0\mu_0}\Lambda_m a_{3-m} + \frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\sigma\mu_0}a_m\right],\\ A_2 &= \omega B_0\sum_{m=1}^{2}(-1)^m\Big\{a_1 a_2\chi^2 B_0\Lambda_m(\xi^2 - \Lambda_{3-m}^2)(\sigma\mu_0)^{-1} + (2\beta^2\xi^2 - \Omega_l^2)\times\\ &\times\left[a_m\Lambda_m(\xi^2 - \Lambda_{3-m}^2)(\sigma\mu_0\Omega_l^2)^{-1} + \frac{\Lambda_4}{i\omega\varepsilon_0\mu_0}a_m\right]\Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\Gamma = D_1^2 D_2^1 - D_1^1 D_2^2,\quad \bar{F}_1 = \frac{\bar{f}_1(\xi)}{\rho c_t^2},\quad \bar{F}_2 = \frac{\bar{f}_2(\xi)}{\rho c_t^2},$$

где $\bar{f}_1(\xi)$ и $\bar{f}_2(\xi)$ — Фурье-трансформанты распределений нагружений $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $\beta = \frac{c_t}{c_l}$,

$$\Lambda_j = \sqrt{\xi^2 - \Omega_l^2(1 + a_j\chi^2\Omega_l^2 B_0)},\qquad j = 1,\ 2, \tag{12}$$

$$\Lambda_3 = \sqrt{\xi^2 - \Omega_t^2},\quad \Lambda_4 = \sqrt{\xi^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0}, \tag{13}$$

причем величины $\Lambda_1 - \Lambda_4$ удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re}\Lambda_j \geqslant 0, \qquad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{14}$$

a_1 и a_2 определяются как решения уравнения

$$a^2 + \frac{1+\chi^2(1+s^2)}{\chi^2\Omega_l^2 s c_l \sqrt{\rho\mu_0}}\, a + \frac{1}{\chi^2\Omega_l^4 \rho\mu_0 c_l^2} = 0. \tag{15}$$

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — периодические функции периодов λ_1 и λ_2, удовлетворяющие условиям разложения в ряд Фурье. Тогда

$$f_j(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^j e^{ip_n^s x}, \quad p_n^j = \frac{\pi n}{\lambda_j}, \qquad j = 1,\ 2, \tag{16}$$

где

$$C_n^j = \frac{1}{2\lambda_j}\int_{-\lambda_j}^{+\lambda_j} f_j(x)\, e^{-ip_n^j x} dx, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Произведя преобразования Фурье (16), получаем

$$\bar{f}_j(\xi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^j \delta(\xi - p_n^j), \qquad j = 1,\ 2. \tag{17}$$

Подставляя это выражение в (5) — (8), производим обратные преобразования Фурье и получаем решение задачи в виде бесконечных функциональных рядов. Приведем это решение для случая гармонического во времени нагружения, распределение которого по оси x задано по закону $f_1(x) = f_0 \cos rx$, $f_2(x) = 0$, $r = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — пространственный период нагружения.

Выражение (16) теперь запишется в виде

$$f_1(x) = \frac{f_0}{2}\left(e^{irx} + e^{-irx}\right), \tag{18}$$

а выражение (17) —

$$\bar{f}_1(\xi) = \pi f_0 [\delta(r-\xi) + \delta(r+\xi)]. \tag{19}$$

Для величин u_x, u_y, b и b_0 получаем

$$u_x(x,\ y,\ t) = \operatorname{Re}\left\{\Gamma^{-1}\left[r\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m-1} a_m D_m^1 e^{-y\Lambda_{3-m}} + i\Lambda_3 A_1 e^{-y\Lambda_3}\right] F_0 \sin rx e^{i\omega t}\right\}, \tag{20}$$

$$u_y(x,\ y,\ t) = \operatorname{Re}\left\{\Gamma^{-1}\left[\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m-1} a_m D_m^1 \Lambda_{3-m} e^{y-\Lambda_{3-m}} + irA_1 e^{-y\Lambda_3}\right] F_0 \cos rx e^{i\omega t}\right\}, \tag{21}$$

$$b(x,\ y,\ t) = \operatorname{Re}\left[\Gamma^{-1}\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m-1} D_m^1 F_0 \cos rx e^{-y\Lambda_{3-m}+i\omega t}\right], \tag{22}$$

$$b_0(x,\ y,\ t) = \operatorname{Re}\left[\Gamma^{-1}\sum_{m=1}^{2}(-1)^{m-1} D_m^1 F_0 \cos rx e^{y\Lambda_4 + i\omega t}\right], \tag{23}$$

где $F_0 = \frac{f_0}{\rho c_l^2}$.

Усредненная по времени плотность мощности джоулева тепла определяется согласно работе [6]:

$$q = \frac{(\vec{j},\ \vec{j}^*)}{2\sigma}, \tag{24}$$

где $\vec{j} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\vec{b}$, а звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Используя формулы (24) и (22), для q получаем выражение

$$q(x,\ y) = \frac{F_0^2}{\sigma\mu_0^2|\Gamma|^2}\left\{\sum_{m=1}^{2}\left[|D_m^1|^2\left(|\Lambda_{3-m}|^2\cos^2 rx + r^2\sin^2 rx\right)e^{-y2\mathrm{Re}\Lambda_{3-m}}\right] - 2\,\mathrm{Re}\left[D_1^1 D_2^{1*}\left(\Lambda_2\Lambda_1^*\cos^2 rx + r^2\sin^2 rx\right)e^{i(\mathrm{Im}(\Lambda_2-\Lambda_1)y)}\right]e^{-y\mathrm{Re}(\Lambda_2+\Lambda_1)}\right\}. \quad (25)$$

Волновые процессы, как видно из выражений (20) — (23), представлены электромагнитной волной в вакууме и тремя волнами в среде — двумя, которые назовем, как в работе [4], модифицированной упругой волной сжатия

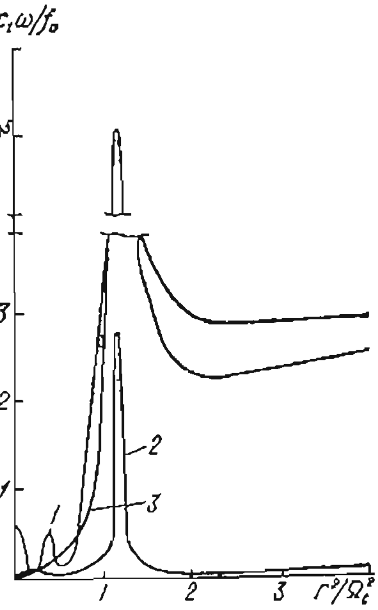

Рис. 1.

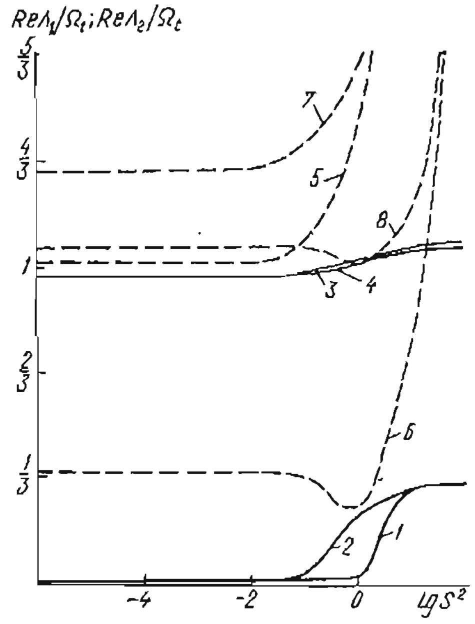

Рис. 2.

и модифицированной электромагнитной волной, и сдвиговой волной, распространяющимися в глубь среды со скоростями $v_1 = \frac{\omega}{\mathrm{Im}\,\Lambda_1}$, $v_2 = \frac{\omega}{\mathrm{Im}\,\Lambda_2}$ и $v_3 = \frac{\omega}{\mathrm{Im}\,\Lambda_3}$ соответственно. Модифицированные волны состоят из механической и электромагнитной компонент. Таким образом, поле перемещений представлено суперпозицией трех волн — механических компонент модифицированных упругой волны сжатия и электромагнитной волны и сдвиговой волной. Индукцированное электромагнитное поле в среде представляет суперпозицию электромагнитных компонент модифицированных волн.

Как следует из выражений (20) — (23), амплитуды и характер распространения волн поля перемещений и поля магнитной индукции зависят от величины пространственного периода нагружения величины индукции начального магнитного поля и проводимости среды (параметра χ^2).

На рис. 1 показан характер зависимости амплитуд A y-составляющих перемещений модифицированной упругой волны сжатия (кривая *1*), модифицированной электромагнитной волны (кривая *2*) и сдвиговой волны (кривая *3*) от r^2 при $s^2 = 10^{-5}$, $|\chi^2| = 1$. Наличие экстремумов амплитуд при разных значениях r^2 связано со спецификой нагружения и имеет место также при отсутствии магнитного поля. Максимум при $r^2 = 1{,}135\Omega_t^2$ присущ всем волнам и появляется вследствие достижения минимума величины $\Gamma(r)$, стоящей в знаменателях амплитуд волн. Физической причиной появления этого максимума, как показывает сравнение выражения для $\Gamma(r)$ с дисперсионным соотношением для поверхностных магнитоупругих волн [10], является совпадение величины пространственного периода нагружения и длины магнитоупругих поверхностных волн, что приводит к своеобразному резонансу.

Изменение величины индукции внешнего магнитного поля приводит к изменению расположения и величин экстремумов амплитуд волн. Причем

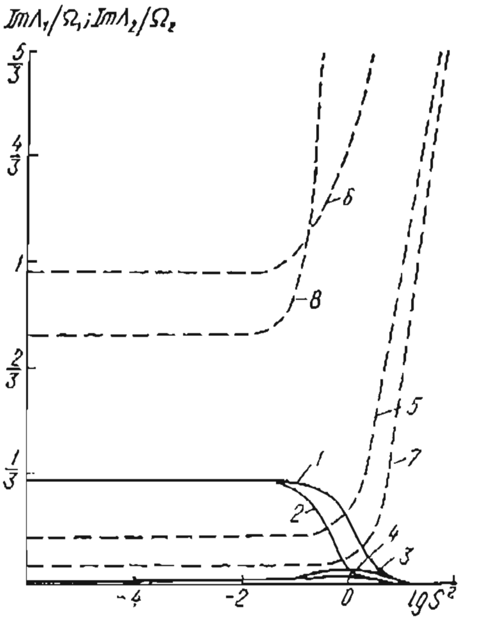

Рис. 3.

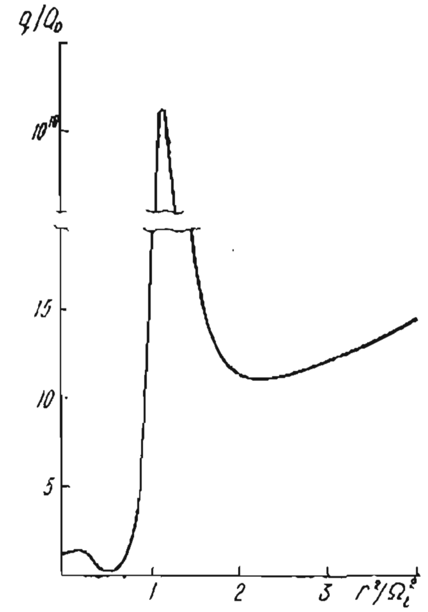

Рис. 4.

для $|\chi^2| \gg 1$ при увеличении магнитного поля последний максимум сдвигается к $r^2 = \Omega_l^2$, что соответствует результатам работы [8] для идеального проводника.

Коэффициенты затухания и волновые числа сдвиговой волны и волны индукции магнитного поля в вакууме, как видно из формул (13), зависят лишь от величины пространственного периода нагружения. Причем при $r^2 > \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ для волны индукции магнитного поля в вакууме, а при $r^2 > \Omega_t^2$ для сдвиговой волны движение становится апериодическим.

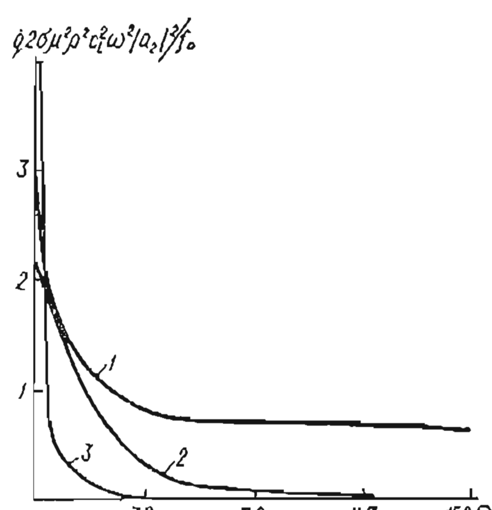

Рис. 5.

На рис. 2 показана зависимость коэффициентов затухания, а на рис. 3 — волновых чисел модифицированной упругой волны сжатия (сплошные кривые) и модифицированной электромагнитной волны (пунктирные кривые) от величины внешнего магнитного поля при значениях $r^2 = 0{,}1\Omega_l^2$ (кривые *1*, *2*, *5*, *6*) и $r^2 = 1{,}135\Omega_l^2$ (кривые *3*, *4*, *7*, *8*); $|\chi^2| = 0{,}5$ (кривые *2*, *4*, *6*, *8*) и $|\chi^2| = 10$ (кривые *1*, *3*, *8*, *7*). Интересно, что при $|\chi^2| = 0{,}5$, $s^2 = 1$ обе волны вырождаются в одну. Однако значение $s^2 = 1$ соответствует практически недостижимым полям $B_0 \approx 3{,}5 \cdot 10^2$ *тл*. Для достижимых теперь (в импульсном режиме) величин индукций магнитного поля $B_0 \leqslant 50$ *тл* (см., например, работу [3]), зависимость коэффициентов поглощения и волновых чисел модифицированных упругой волны сжатия и электромагнитной волны от s^2 близка к линейной.

На рис. 4 показан характер зависимости плотности мощности тепловыделения на поверхности полупространства от r^2 при $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ Минимум тепловыделения при $r^2 = 0{,}5\Omega_l^2$ возникает вследствие гашения волн, приходящих от разных точек поверхности полубесконечного тела, что приводит к уменьшению амплитуд волновых процессов и, значит, к уменьшению тепловыделения. Максимум тепловыделения при $r^2 = 1{,}135\Omega_l^2$ имеет ту же причину возникновения, что и рассмотренный выше максимум амплитуд волн при том же значении r^2.

На рис. 5 показан характер распределения по глубине джоулева тепла для $s^2 = 10^{-5}$, $|\chi^2| = 1$, $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ для $r^2 = 0{,}2\Omega_l^2$ (кривая *1*), $r^2 = \Omega_l^2$ (кривая *2*) и $r^2 = 18\Omega_l^2$ (кривая *3*). При возрастании r^2 (уменьшение пространственного периода нагружения) тепловыделение, как и волновые процессы, становится все более приповерхностным, а глубинный нагрев невозможным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А. Н., Киселев М. И., Рыкалин Н. Н.— Физика и химия обработки материалов, 1970, 6.
2. Даргейко М. М., Селезов И. Т.— В кн.: Волны в неупругих средах. Изд. АН МССР, Кишинев, 1970.
3. Карасик В. Р. Физика и техника сильных магнитных полей. «Наука», М., 1964.
4. Конторович В. М., Тищенко Н. А.— Изв. вузов. Радиофизика, 1963, 6, 1.
5. Пелетминский С. В.— УФЖ, 1958, 3, 5.
6. Подстригач Я. С., Колодий Б. И.— Прикладная механика, 1970, 6, 12.
7. Шубаев С. Н., Шкарлет Ю. М.— Дефектоскопия, 1972, 5.
8. Kaliski S., Rogula D.— Proc. Vibr. Problems, 1960, 1. 5.
9. Kaliski S.— Proc. Vibr. Problems, 1962, 3, 4.
10. Kaliski S.— Proc. Vibr. Problems, 1963, 4, 4.
11. Sinha D. K.— Pure Appl. Geophysics (Pageoph.), 1965, 60, 1.

Львовский филиал
математической физики
Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

ВЛИЯНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ НА ВЕЛИЧИНУ ПОСАДКИ КОЛЬЦА, ВПРЕССОВАННОГО В КРИВОЛИНЕЙНОЕ ОТВЕРСТИЕ ПЛАСТИНКИ

М. К. Зварич, Т. Л. Мартынович, В. С. Щукин

Рассмотрим упругое равновесие бесконечной изотропной пластинки с криволинейным отверстием, в точках z_i и z_j которой приложены соответственно сосредоточенные силы P_i и моменты M_j ($i = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, s$). Пусть в отверстие пластинки L впрессован замкнутый упругий стержень (кольцо) постоянного поперечного сечения. Контакт между телами осуществляется вдоль всего контура L. Трением между контактирующими телами пренебрегаем. На линии контакта L как функция дуги задана нормальная величина скачка вектора перемещения $\varepsilon^*(t)$. Напряженно-деформированное состояние кольца описывается уравнениями теории тонких криволинейных стержней.

Определение напряженного состояния в контактирующих телах сводится к нахождению компонент деформации e_0, θ_b стержня и функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, которые удовлетворяют граничным условиям

$$\int_L F_1(t)\,\mathrm{Re}\, dU^* = 2\mu \int_L F_1(t)\, d\,[u_{1n} + \varepsilon^*(t)], \qquad (1)$$