

## ЛИТЕРАТУРА

1. Даревский В. М.— ПММ, 1952, 16, 2.
2. Осадчук В. А., Подстригач Я. С.— МТТ, 1973, 3.
3. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. «Наукова думка», К., 1973.
4. Ярема С. Я., Саврук М. П.— ДАН УРСР. Сер. А, 1969, 1.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1974 г.

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ \*

Р. Н. Швец, В. Д. Павленко,  
И. И. Федин, А. П. Матковский

Распределение температурных напряжений в оболочках, ослабленных отверстиями, с учетом конвективного теплообмена с поверхностями мало исследовано [1]. Получены решения задач в основном для сферической оболочки [8, 10, 11], ослабленной одним или несколькими круговыми отверстиями, а для цилиндрической оболочки намечены общие пути решения такого рода задач [2]. Ниже приведены исследования температурных напряжений в цилиндрической оболочке с круговым отверстием при конвективном теплообмене.

**Постановка задачи. Основные уравнения.** Рассмотрим бесконечную изотропную цилиндрическую оболочку постоянной толщины  $2h$  с круговым отверстием радиуса  $\rho$  на боковой поверхности, которая находится в условиях переменной температуры и теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона. Срединную поверхность упругой оболочки радиуса  $R$  отнесем к криволинейной ортогональной сопряженной системе координат  $x, y$  с началом в центре отверстия. Оси  $Ox$  и  $Oy$  направим соответственно по образующей и направляющей, ось  $Oz$  — по внешней нормали к срединной поверхности.

Учитывая локальность возмущенной зоны возле отверстия, напряженно-деформированное состояние оболочки будем описывать уравнениями плоских оболочек, которые в случае неравномерного ее нагрева имеют вид [1,8]

$$\Delta\Delta\Phi + i\gamma^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2Eh\alpha_l \Delta(iT_1 - \nu_0 T_2), \quad (1)$$

где

$$\Phi = E_0 w - i\varphi, \quad (2)$$

$$T_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T dz, \quad T_2 = \frac{2}{3h^2} \int_{-h}^h T z dz, \quad (3)$$

$$\gamma^2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh}, \quad \nu_0 = \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}}, \quad E_0 = \frac{2Eh^3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad \varphi — \text{функция напряжений, } w — \text{прогиб оболочки, } E \text{ и } \nu — \text{модуль Юнга и коэффициент Пуассона, } \alpha_l — \text{коэффициент линейного расширения, } T — \text{температура оболочки.}$$

Решение уравнения (1) запишем в виде суммы

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi_0, \quad (4)$$

где  $\tilde{\Phi}$  — решение однородного уравнения,  $\Phi_0$  — частное решение (1).

\* Основные результаты работы были доложены на XIII научном совещании по тепловым напряжениям в элементах конструкций (г. Канев, май 1974 г.).

Если принять размеры отверстия такими, чтобы возмущение температурного поля и напряженного состояния возле него носили локальный характер, то решение  $\tilde{\Phi}$  однородного уравнения, записанное в полярной системе координат  $r, \theta$ , в которой координатная линия  $r = \rho$  совпадает с контуром отверстия, можно взять в виде [6, 7]

$$\tilde{\Phi} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^{k-1} C_n^0 L_{nk}^*(\omega r) \cos k\theta, \\ \Phi_2 &= \sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^k \varepsilon_k A_n^0 L_{nk}(\omega r) \cos k\theta, \\ \Phi_3 &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i^{k-1} C_n^0 L_{nk}(\omega r) \sin k\theta, \\ \Phi_4 &= \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i^k A_n^0 L_{nk}(\omega r) \sin k\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

В равенствах (6) обозначено:

$$\begin{aligned} A_n^0 &= A_n + iB_n, \quad L_{nk}(\omega r) = H_n^{(1)}(\omega r) [J_{n-k}(\omega r) + J_{n+k}(\omega r)], \\ C_n^0 &= C_n + iD_n, \quad L_{nk}^*(\omega r) = H_n^{(1)}(\omega r) [J_{n-k}(\omega r) - J_{n+k}(\omega r)], \\ \omega &= \frac{\gamma}{2} \sqrt{i}, \quad \varepsilon_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } k = 0, \\ 1 & \text{при } k \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь  $H_n^{(1)}(\omega r), J_n(\omega r)$  — функции Ханкеля и Бесселя первого рода с целыми индексами. Каждая из функций (6) соответствует определенному частному виду нагружения оболочки:  $\Phi_1$  — симметричному относительно  $x$  и обратно симметричному относительно  $y$ ,  $\Phi_2$  — симметричному относительно  $x$  и  $y$ ,  $\Phi_3$  — обратно симметричному относительно  $x$  и симметричному относительно  $y$ ,  $\Phi_4$  — обратно симметричному относительно  $x$  и  $y$ . Для конкретных случаев деформации оболочки необходимо выбирать соответствующее решение (6).

Компоненты напряженного состояния выражаются через функцию  $\Phi$  формулами

$$\begin{aligned} N_r &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \Delta \right) \text{Im } \Phi, \quad N_\theta = - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{Im } \Phi, \\ S &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \text{Im } \Phi, \\ M_r &= - \frac{1-\nu}{\gamma_0} \left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \Delta \right] \text{Re } \Phi + \frac{\alpha_l E_0 (1+\nu)}{h(1-\nu)} T_2 \right\}, \\ M_\theta &= - \frac{1}{\gamma_0} \left\{ \left[ \Delta - (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \text{Re } \Phi + \frac{\alpha_l E_0 (1+\nu)}{h} T_2 \right\}, \\ M_{r\theta} &= - \frac{1-\nu}{\gamma_0 r} \left( \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \text{Re } \Phi, \\ Q_r &= - \frac{1}{\gamma_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \Delta \text{Re } \Phi + \frac{\alpha_l E_0 (5+6\nu)}{3h(1+\nu)} T_2 \right], \quad Q_r^* = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} M_{r\theta}, \\ Q_\theta &= - \frac{1}{\gamma_0 r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \Delta \text{Re } \Phi + \frac{\alpha_l E_0 (5+6\nu)}{3h(1+\nu)} T_2 \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\gamma_0 = R\gamma^3$ .

Температура оболочки, а соответственно и интегральные характеристики  $T_1$  и  $T_2$ , входящие в уравнение (1), определяются из решения соответствующей краевой задачи теплопроводности [5, 9]. Таким образом, при известном температурном поле, напряженное состояние полностью определяется функцией  $\Phi$ .

**Определение температурного поля.** Пусть оболочка находится в условиях конвективного теплообмена между ее поверхностями  $z = \pm h$  и окружающей средой, температура которой является функцией времени. Примем, что контур отверстия теплоизолирован, тогда температурное поле оболочки с учетом кривизны определяется уравнением [5]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2k_0 \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (8)$$

при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} T &= T_0 \text{ при } \tau = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial z} + h_1^{(1)} [T - t_1(\tau)] &= 0 \text{ при } z = h, \\ \frac{\partial T}{\partial z} - h_1^{(2)} [T - t_2(\tau)] &= 0 \text{ при } z = -h, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $k_0 = \frac{1}{2R}$ ,  $a$  — коэффициент температуропроводности материала оболочки,  $h_1^{(1)}$ ,  $h_1^{(2)}$  — относительные коэффициенты теплоотдачи с поверхностями  $z = \pm h$ .

Используя интегральное преобразование Лапласа, находим решение задачи (8), (9) в изображениях

$$T^* = \frac{T_0}{\rho} + \frac{e^{-k\frac{z}{h}}}{A(\rho)} \left[ \text{Bi}^{(1)} L_1 \left( t_1^* - \frac{T_0}{\rho} \right) + \text{Bi}^{(2)} L_2 \left( t_2^* - \frac{T_0}{\rho} \right) \right], \quad (10)$$

где обозначено:

$$A(\rho) = (\varepsilon^2 - h_1 h_2) \frac{\text{sh } 2\varepsilon}{\varepsilon} + (\text{Bi}^{(1)} + \text{Bi}^{(2)}) \text{ch } 2\varepsilon,$$

$$L_1 = \left[ \text{ch } \varepsilon \left( 1 + \frac{z}{h} \right) + \frac{h_2}{\varepsilon} \text{sh } \varepsilon \left( 1 + \frac{z}{h} \right) \right] e^k,$$

$$L_2 = \left[ \text{ch } \varepsilon \left( 1 - \frac{z}{h} \right) - \frac{h_1}{\varepsilon} \text{sh } \varepsilon \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \right] e^{-k},$$

$$\varepsilon = \sqrt{k^2 + \frac{\rho h^2}{a}}, \quad h_1 = k - \text{Bi}^{(1)}, \quad h_2 = k + \text{Bi}^{(2)},$$

$$\text{Bi}^{(1)} = h_1^{(1)} h, \quad \text{Bi}^{(2)} = h_1^{(2)} h, \quad k = k_0 h.$$

Для нахождения оригинала функции  $T^*$  используем теорему умножения изображений и теорему разложения [4]. Решениями уравнения  $A(\rho) = 0$  являются  $\rho_n = -\frac{a}{h^2} (\mu_n^2 + k^2)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), где  $\mu_n$  — корни уравнения

$$\text{tg } 2\mu = \frac{(\text{Bi}^{(1)} + \text{Bi}^{(2)}) \mu}{\mu^2 + h_1 h_2}.$$

В результате искомое температурное поле может быть записано в виде

$$\begin{aligned} T = T_0 + e^{-k\frac{z}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\rho_n \tau}}{A'(\rho_n)} & \left[ \text{Bi}^{(1)} e^k L_3 \int_0^{\tau} (t_1 - T_0) e^{-\rho_n t} dt + \right. \\ & \left. + \text{Bi}^{(2)} e^{-k} L_4 \int_0^{\tau} (t_2 - T_0) e^{-\rho_n t} dt \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$L_3 = \cos \mu_n \left(1 + \frac{z}{h}\right) + \frac{h_2}{\mu_n} \sin \mu_n \left(1 + \frac{z}{h}\right),$$

$$L_4 = \cos \mu_n \left(1 - \frac{z}{h}\right) - \frac{h_1}{\mu_n} \sin \mu_n \left(1 - \frac{z}{h}\right),$$

$$A'(\rho_n) = \frac{h^2}{2a\mu_n^3} \left\{ \sin 2\mu_n [\mu_n^2 (1 + 2(\text{Bi}^{(1)} + \text{Bi}^{(2)})) - h_1 h_2] + \right.$$

$$\left. + 2\mu_n \cos 2\mu_n (\mu_n^2 + h_1 h_2) \right\}.$$

Интегральные температурные характеристики  $T_1$ ,  $T_2$ , необходимые для определения напряженно-деформированного состояния оболочки, выражаются формулами

$$T_1 = T_0 + \text{Bi}^{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\rho_n \tau} L_3 \int_0^{\tau} (t_1 - T_0) e^{-\rho_n t} dt}{2A'(\rho_n) \mu_n (k^2 + \mu_n^2)}, \quad (12)$$

$$T_2 = \text{Bi}^{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e^{\rho_n \tau} L_4 \int_0^{\tau} (t_1 - T_0) e^{-\rho_n t} dt}{2A'(\rho_n) \mu_n (k^2 + \mu_n^2)^2}.$$

Здесь

$$L_5 = (\mu_n^2 - k^2) \sin 2\mu_n + 2k\mu_n (e^{2k} - \cos 2\mu_n),$$

$$L_6 = \sin 2\mu_n (\mu_n^4 + 3k\mu_n^2 - k^4 - k^3) - \mu_n \cos 2\mu_n \times$$

$$\times (2k^3 + 2k\mu_n^2 + 3k^2 - \mu_n^2) + \mu_n e^{2k} (3k^2 - 2k^3 - 2k\mu_n^2 - \mu_n^2), \quad h_1^{(2)} = 0.$$

**Определение напряженного состояния.** Определим термонапряженное состояние оболочки, которая находится под воздействием температурного поля (11). Контур кругового отверстия теплоизолирован и свободный от напряжений, т. е.

$$N_r = 0, \quad M_r = 0, \quad S_{r\theta} = 0, \quad Q_r^* = 0 \quad \text{при } r = \rho. \quad (13)$$

Для решения рассматриваемой задачи достаточно взять

$$\Phi = \Phi_2 \quad (\Phi_0 = 0). \quad (14)$$

Подставляя решение  $\Phi$  в граничные условия (13), для определения постоянных  $A_n$  и  $B_n$  получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=0}^{2l} \left[ A_n \left( \gamma_1 \beta'_{nk}(x) - \frac{k^2}{\rho} \beta_{nk}(x) \right) + B_n \left( \gamma_1 \alpha'_{nk}(x) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{k^2}{\rho} \alpha_{nk}(x) \right) \right] = 0, \quad k = 2, 4, \dots, 2l,$$

$$\sum_{n=0}^{2l} \left[ A_n \left( \frac{\beta_{nk}(x)}{\rho} - \gamma_1 \beta'_{nk}(x) \right) + B_n \left( \frac{\alpha_{nk}(x)}{\rho} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \gamma_1 \alpha'_{nk}(x) \right) \right] = 0, \quad k = 2, 4, \dots, 2l,$$

$$\sum_{n=0}^{2l} \left\{ A_n \left[ (1 + \nu_1) \gamma_1^2 \alpha''_{nk}(x) + \frac{\nu_1 \gamma_1}{\rho} \alpha'_{nk}(x) - \frac{\nu_1 k^2}{\rho^2} \alpha_{nk}(x) \right] - \right.$$

$$\left. - B_n \left[ (1 + \nu_1) \gamma_1^2 \beta''_{nk}(x) + \frac{\nu_1 \gamma_1}{\rho} \beta'_{nk}(x) - \frac{\nu_1 k^2}{\rho^2} \beta_{nk}(x) \right] \right\} =$$

$$= -2\delta_k^0 E_1 T_2, \quad k = 0, 2, \dots, 2l,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \left[ \gamma_1^3 \alpha_{nk}(\kappa) + \frac{\gamma_1^2}{\rho} \alpha_{nk}(\kappa) - \frac{\gamma_1}{\rho^2} \alpha'_{nk}(\kappa) (1 + \nu k^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k^2 (1 + \nu)}{\rho^3} \alpha_{nk}(\kappa) \right] - B_n \left[ \gamma_1^3 \beta_{nk}(\kappa) + \frac{\gamma_1^2}{\rho} \beta_{nk}(\kappa) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\gamma_1}{\rho^2} \beta'_{nk}(\kappa) (1 + \nu k^2) + \frac{k^2 (1 + \nu)}{\rho^3} \beta_{nk}(\kappa) \right] \right\} = 0, \quad k = 0, 2, \dots, 2l, \quad (15)$$

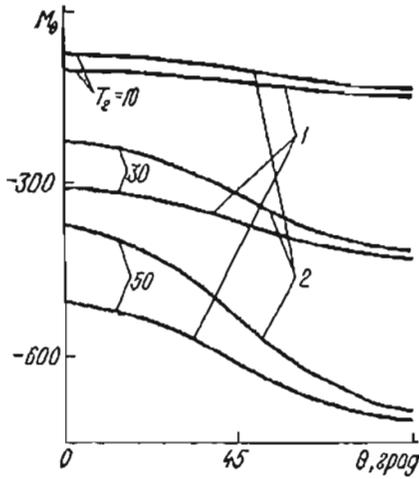


Рис. 1.

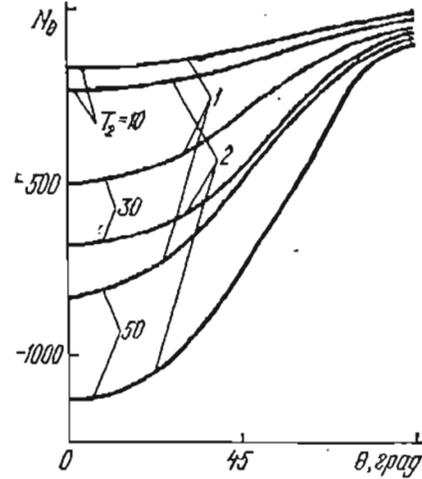


Рис. 2.

где

$$\alpha_{nk}(\kappa) = \operatorname{Re}(L_{nk}(\omega r)), \quad \beta_{nk}(\kappa) = \operatorname{Im}(L_{nk}(\omega r)), \quad \kappa = \gamma_1 \rho, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma}{2\sqrt{2}},$$

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu},$$

$\alpha'_{nk}(\kappa), \beta'_{nk}(\kappa)$  — производные по  $\kappa, i = 1, 2, \dots$ ,

$$\delta_k^u = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

Систему (15) можно решить методом редукции [2, 3]. При этом граничные условия будут удовлетворяться приближенно.

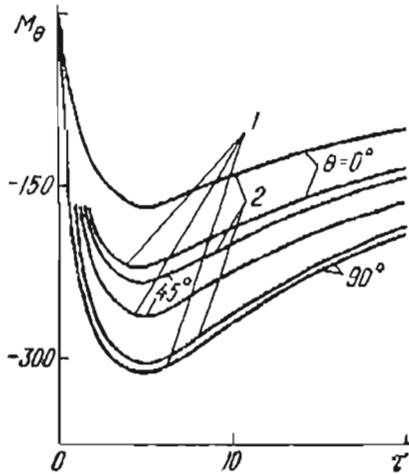


Рис. 3.

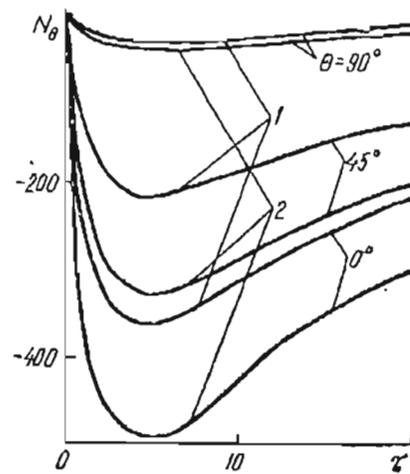


Рис. 4.

Подставив функцию  $\Phi$  из (14) в (7), получим

$$N_\theta = - \sum_{k=0,2,\dots}^{2l} \sum_{n=0}^{2l} (-1)^{\frac{k}{2}} \varepsilon_k \gamma_1^2 (A_n \beta_{nk}''(\chi) + B_n \alpha_{nk}'(\chi)) \cos k\theta, \quad (16)$$

$$M_\theta = - \frac{1}{\gamma_0 r^2} \sum_{k=0,2,\dots}^{2l} \sum_{n=0}^{2l} (-1)^{\frac{k}{2}} \varepsilon_k [A_n (\nu \gamma_1^2 r^2 \alpha_{nk}'(\chi) + \gamma_1 r \alpha_{nk}'(\chi) - k^2 \alpha_{nk}(\chi)) - \\ - B_n (\nu \gamma_1^2 r^2 \beta_{nk}''(\chi) + \gamma_1 r \beta_{nk}''(\chi) - k^2 \beta_{nk}(\chi))] \cos k\theta - \alpha_t E_0 (1 + \nu) (h \gamma_0)^{-1} T_2.$$

Формулами (16) определяются температурные усилия и моменты в оболочке с круговым отверстием на боковой поверхности, обусловленные температурным полем (11), (12).

**Пример.** Определим напряженное состояние цилиндрической оболочки с геометрическими параметрами:  $R = 0,3 \text{ м}$ ,  $h = 0,005 \text{ м}$ ,  $\rho_1 = 0,03 \text{ м}$  (для кривых 1 на рис. 1—4),  $\rho_2 = 0,05 \text{ м}$  (для кривых 2 на рис. 1—4) и термоупругими характеристиками [4]:

$E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $a = 0,66 \times 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$ ,  $\alpha_t = 1,52 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{град}}$ ,  $Bi^{(1)} = 0,3$ ,  $T_0 = 0^\circ \text{С}$ ,  $t_1 = 200^\circ \text{С}$ ,  $h_i^{(2)} = 0$ .

Изгибающие моменты  $M_\theta$  и усилия  $N_\theta$  на контуре, для различных значений усредненной температуры  $T_2$ , показаны на рис. 1 и 2. Величины  $M_\theta$  и  $N_\theta$  везде на контуре отрицательны и достигают наибольших по абсолютной величине значений в точках  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $90^\circ$ ,  $270^\circ$  соответственно. Изменения моментов и усилий во времени приведены на рис. 3, 4. Величины  $M_\theta$  и  $N_\theta$  достигают наибольших значений, когда функция  $T_2$  имеет максимум ( $\tau \approx 5 \text{ сек}$ ), а затем быстро убывают до нуля, поскольку температура по толщине оболочки выравнивается. Кривые рис. 5 характеризуют влияние критерия Био на величины моментов  $M_\theta$  (штриховые линии) и усилий  $N_\theta$  (сплошные) на контуре отверстия ( $\rho = \rho_2$ ,  $\tau = 5 \text{ сек}$ ).

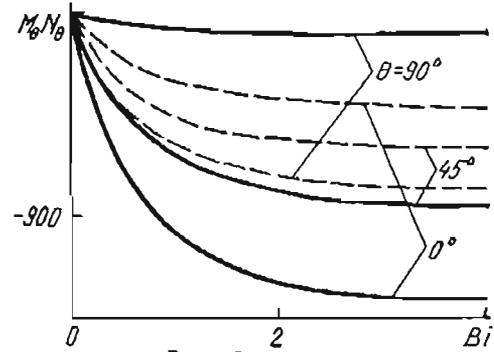


Рис. 5.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н.— Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. «Наука», М., 1970.
2. Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. Под ред. А. Н. Гузя. «Наукова думка», К., 1974.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М., 1962.
4. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
5. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
6. Савін Г. М., Гузь О. М.— ДАН УРСР, 1964, 11.
7. Хазанов Х. С.— Труды Куйбышевского авиационного института, 29. Куйбышев, 1967.
8. Швець Р. Н., Павленко В. Д.— ФХММ, 1970, 3.
9. Швець Р. Н., Павленко В. Д.— ИФЖ, 1972, 23, 5.
10. Швець Р. М., Павленко В. Д.— ДАН УРСР. Сер. А, 1973, 8.
11. Швець Р. Н., Павленко В. Д., Сянишин Л. В.— Проблемы прочности, 1974, 6.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1974 г.