

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ
ЗАМКНУТОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНАМИ**

В. А. Осадчук, М. М. Николишин

В данной статье предложен способ сведения задачи о напряженном состоянии замкнутой трансверсально-изотропной (с конечной сдвиговой жесткостью) оболочки с трещиной к решению системы сингулярных интегральных уравнений, которая записана для случая, когда трещина расположена вдоль образующей. В качестве примера исследуем интегральное уравнение для бесконечной пластины с системой трещин.

Исходя из представления компонент тензора $\{e_{ij}\}$ геометрически малой деформации в виде

$$e_{ij} = e_{ij}^{(s)} + e_i^0 \quad (i, j = \alpha, \beta), \quad (1)$$

где e_{ij}^0 — компоненты тензора несовместных деформаций (тензора дисторсии), $e_{ij}^{(s)}$ — компоненты тензора упругой деформации, и используя соответствующие соотношения теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью [3], для круговой цилиндрической оболочки получаем следующие разрешающие уравнения:

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \psi + \frac{1}{c^2} (1 - \eta \nabla^2) \frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^4} = D_0 R^2 \left[(1 - \eta \nabla^2) q - R \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{R} \nabla^2 \nabla^2 \psi^0 \right], \quad \nabla^2 \varphi - \delta^2 \varphi = \eta R^2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \right). \quad (2)$$

Здесь ψ^0 — функция, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial \alpha^2} &= R \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_1^0}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2^0}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}^0}{\partial \alpha \partial \beta} \right), \\ f_1 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (\varkappa_1^0 + \nu \varkappa_2^0) + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \varkappa_{12}^0}{\partial \alpha} - \frac{1}{\eta R} \varepsilon_{13}^0, \\ f_2 &= \frac{\partial}{\partial \beta} (\varkappa_2^0 + \nu \varkappa_1^0) + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \varkappa_{12}^0}{\partial \alpha} - \frac{1}{\eta R} \varepsilon_{23}^0, \\ q &= -\frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^0}{\partial \beta} \right), \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad \eta = \frac{\varepsilon}{R^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\delta^2 = \frac{2}{\varepsilon (1 - \nu)}, \quad \varepsilon = \frac{h^2}{3k' (1 - \nu^2)} \frac{E}{G'}, \quad c^2 = \frac{h^2}{3 (1 - \nu^2) R^2}, \quad D_0 = 2Eh,$$

$\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots, \varkappa_{12}^0$ — осредненные по толщине оболочки компоненты тензора $\{e_{ij}^0\}$ [3], E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона в срединной поверхности, G' — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных к срединной поверхности, k' — коэффициент сдвига, R и $2h$ — радиус срединной поверхности и толщина оболочки, α, β — криволинейные координаты срединной поверхности оболочки.

Усилия и моменты, возникающие в оболочке, определяются через функции ψ и φ соотношениями

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^3 \partial \beta^2}, \quad N_2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^4}, \quad S = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^2 \partial \beta}, \\ M_1 &= -D \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} + \nu \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta} \right) - \varkappa_1^0 - \nu \varkappa_2^0 \right], \quad Q_{13} = \frac{D}{\varepsilon} \left(\gamma_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \varepsilon_{13}^0 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$M_3 = -D \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta} + \nu \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} \right) - \kappa_2^0 - \nu \kappa_1^0 \right], \quad Q_{23} = \frac{D}{e} \left(\gamma_2 + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \beta} - \varepsilon_{23}^0 \right),$$

$$H = \frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha} \right) - \kappa_{12}^0 \right],$$

где

$$\gamma_1 = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} - \eta R f_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} - \eta R f_2 - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha},$$

$$\Gamma = W + \eta \nabla^2 W + \frac{R^2 \eta^3}{D} \left(q - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^4} \right), \quad W = \frac{1}{D_0 R} \nabla^2 \nabla^2 \Psi + \Psi^0,$$

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}.$$

В случае, когда трещина расположена вдоль отрезка $|\alpha| \leq \alpha_0$, $\beta = 0$, а напряженно-деформированное состояние оболочки без трещины симметрично относительно сечений $\alpha = 0$, $\beta = 0$, на основании соотношений, связывающих компоненты полной деформации срединной поверхности оболочки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \kappa_{12}$ с обобщенными перемещениями $u, v, w, \gamma_1, \gamma_2$ [3], выражения для компонент $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \dots, \kappa_{12}^0$, характеризующих скачки перемещений и углов поворота на линии трещины, принимают вид

$$\varepsilon_1^0(\alpha, \beta) = \varepsilon_{12}^0(\alpha, \beta) = \varepsilon_{13}^0(\alpha, \beta) = \varepsilon_{23}^0(\alpha, \beta) = \kappa_1^0(\alpha, \beta) = \kappa_{12}^0(\alpha, \beta) = 0,$$

$$\varepsilon_2^0(\alpha, \beta) = \varepsilon_2(\alpha) \delta(\beta), \quad \kappa_2^0(\alpha, \beta) = \kappa_2(\alpha) \delta(\beta) \quad \text{при } |\alpha| \leq \alpha_0; \quad (5)$$

$$\varepsilon_2^0(\alpha, \beta) = \kappa_2^0(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при } |\alpha| \geq \alpha_0.$$

Здесь

$$\varepsilon_2(\alpha) = \frac{1}{R} (v^+ - v^-), \quad \kappa_2(\alpha) = \frac{1}{R} (\gamma_2^+ - \gamma_2^-),$$

$\delta(\beta)$ — функция Дирака, а индексами «+» и «-» обозначены граничные значения соответствующей величины слева и справа от линии трещины (при движении вдоль положительного направления по образующей).

Подставив поле (5) в уравнения (2), для определения разрешающих функций ψ и Φ получим

$$\Phi = \eta R^2 (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{\cos n\beta}{\sqrt{n^2 - \delta^2}} \int_{-\alpha}^{\alpha_0} \kappa_2(\xi) e^{-\sqrt{n^2 + \delta^2} |\xi - \alpha|} d\xi,$$

$$\psi = -D_0 R^2 \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos n\beta \left[R \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \kappa_2(\xi) \Phi_n(\xi - \alpha) d\xi + \right.$$

$$\left. + \nabla^2 \nabla^2 \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \varepsilon_2(\xi) \Phi_n(\xi - \alpha) d\xi \right]. \quad (6)$$

Здесь

$$\Phi_n(\alpha) = \frac{1}{L_n} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{-a_{jn} |\alpha|}}{g_{jn} (a_{jn}^2 + b_{jn}^2)} [(b_{jn} C_{jn} - a_{jn} B_{jn}) \cos b_{jn} \alpha +$$

$$+ (a_{jn} C_{jn} + b_{jn} B_{jn}) \sin b_{jn} |\alpha|], \quad \lambda_n = 1, \quad n \geq 1;$$

$$\Phi_0(\alpha) = \frac{1}{L_0} \left\{ \frac{e^{-a_{20} |\alpha|}}{g_{20} (a_{20}^2 + b_{20}^2)} [(b_{20} C_{20} - a_{20} B_{20}) \cos b_{20} \alpha + (a_{20} C_{20} +$$

$$+ b_{20} B_{20}) \sin b_{20} |\alpha|] + 2 \left(\frac{p_{20}^2 + g_{20}^2}{12} \alpha^2 + p_{20} \right) |\alpha| \right\} \quad \text{при } \frac{4c^2 R^4}{e^3} > 1;$$

$$L_n = 2(C_{1n}^2 + B_{1n}^2), \quad C_{1n} = (p_{2n} - p_{1n})^2 + g_{2n}^2 - g_{1n}^2, \quad C_{2n} = (p_{1n} - p_{2n})^2 +$$

$$+ g_{1n}^2 - g_{2n}^2; \quad B_{1n} = 2(p_{2n} - p_{1n}) g_{1n}, \quad B_{2n} = 2(p_{1n} - p_{2n}) g_{2n};$$

$$p_{jn} = a_{jn}^2 - b_{jn}^2;$$

$$g_{jn} = 2a_{jn}b_{jn}; \quad a_{20} = \frac{1}{2c} \sqrt{2c + \eta}, \quad b_{20} = \frac{1}{2c} \sqrt{2c - \eta},$$

$$a_{10} = b_{10} = 0; \quad \lambda_0 = \frac{1}{2},$$

a_{jn} , b_{jn} — соответственно мнимая и действительная части корней характеристического уравнения

$$(k^2 + n^2)^4 + \frac{1}{c^2} [1 + \eta(k^2 + n^2)] k^4 = 0. \quad (7)$$

Обозначив через u_0 , v_0 , w_0 перемещения в оболочке без трещины, а через u_1 , v_1 , w_1 перемещения, обусловленные полем (7), будем требовать, чтобы суммарные перемещения

$$u = u_0 + u_1, \quad v = v_0 + v_1, \quad w = w_0 + w_1 \quad (8)$$

и соответствующие суммарные усилия в сечении $\beta = 0$ удовлетворяли условиям симметрии и свободных берегов трещины

$$S(\alpha, 0) = 0, \quad H(\alpha, 0) = 0, \quad Q_{23}(\alpha, 0) = 0,$$

$$v(\alpha, 0) = 0, \quad \gamma_2(\alpha, 0) = 0 \quad \text{при } |\alpha| \geq \alpha_0; \quad (9)$$

$$N_2(\alpha, 0) = 0, \quad M_2(\alpha, 0) = 0 \quad \text{при } |\alpha| \leq \alpha_0.$$

Полученное суммарное напряженно-деформированное состояние будет соответствовать искомому напряженному состоянию оболочки с трещиной.

Используя соотношения (4), (6), а также некоторые результаты работы [1], для определения функций $\varepsilon_2(\alpha)$, $\kappa_2(\alpha)$ на основании условий (9) получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\mu_0 \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 F_i(u) K_{mi} |\mu_0(u-s)| du = \pi f_{m0}(s), \quad |s| \leq 1 \quad (m = 1, 2), \quad (10)$$

где

$$F_1(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \varepsilon_2(\alpha), \quad F_2(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \kappa_2(\alpha), \quad s = \frac{\alpha}{\mu_0},$$

$$f_{10}(s) = -\frac{2}{Eh} N_2^0(s, 0), \quad f_{20}(s) = -\frac{2}{Eh} M_2^0(s, 0), \quad \mu_0 = \frac{\alpha}{R},$$

α — полудлина трещины, N_2^0 и M_2^0 — усилие и момент в оболочке без трещины. Ядра системы (10) имеют вид

$$K_{11}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} + K_{11}^0(z), \quad K_{22}(z) = \frac{a_2}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} + K_{22}^0(z),$$

$$K_{12}(z) = K_{21}(z) = -\frac{\nu R}{g_{20}} e^{-a_{20}|z|} \sin b_{20}z +$$

$$+ 4R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{g_{jn}} e^{-a_{jn}|z|} (D_{jn}^{(1)} \cos b_{jn}z \operatorname{sgn} z + D_{jn}^{(2)} \sin b_{jn}z),$$

$$K_{11}^0(z) = \frac{1}{g_{20}} e^{-a_{20}|z|} (g_{20} \cos b_{20}z \operatorname{sgn} z - p_{20} \sin b_{20}z) - \operatorname{sgn} z +$$

$$+ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{L_n} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{g_{jn}} e^{-a_{jn}|z|} (A_{jn}^{(1)} \cos b_{jn}z \operatorname{sgn} z + A_{jn}^{(2)} \sin b_{jn}z) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} e^{-n|z|} \left(\operatorname{sgn} z - \frac{1}{2} nz \right) \right] + \frac{1}{2} (1 - z \operatorname{csch} z) \operatorname{cth} \frac{z}{2}, \quad (11)$$

$$K_{22}^0(z) = 4R^2c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{L_n} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{g_{jn}} e^{-a_{jn}|z|} (C_{jn}^{(1)} \cos b_{jn}z \operatorname{sgn} z + C_{jn}^{(2)} \sin b_{jn}z) + \right. \\ \left. + \frac{\eta(1-\nu)^2 n^2}{2} e^{-\sqrt{n^2+\delta^4}|z|} \operatorname{sgn} z - \frac{1-\nu^2}{2} e^{-n|z|} \left(\operatorname{sgn} z - \frac{1}{2} nz \right) \right] + \\ + \frac{R^2c^2}{g_{20}} e^{-a_{20}|z|} (C_{20}^{(1)} \cos b_{20}z \operatorname{sgn} z + C_{20}^{(2)} \sin b_{20}z) + \\ + a_2 (1 - z \operatorname{csch} z) \operatorname{cth} \frac{z}{2} + \left(\frac{R^2}{p_{20}^2 + g_{20}^2} - 2a_2 \right) \operatorname{sgn} z,$$

где

$$A_{jn}^{(1)} = d_{jn}E_{jn} - k_{jn}H_{jn} - 2n^2(k_{jn}C_{jn} + d_{jn}B_{jn}) + n^4E_{jn}, \\ C_{jn}^{(1)} = (1 - \nu^2)(d_{jn}E_{jn} - k_{jn}H_{jn}) - 2n^2(2 - \nu - \nu^2)(k_{jn}C_{jn} + d_{jn}B_{jn}) + \\ + n^4(5 - 4\nu - \nu^2)E_{jn} - 2n^6(1 - \nu)B_{jn} + \frac{1}{c^2}E_{jn} + \eta(1 - \nu)^2 \left[s_{jn}A_{jn} - \right. \\ \left. - t_{jn}D_{jn} + \left(3n^2 + \frac{\eta}{c^2} \right) (d_{jn}E_{jn} - k_{jn}H_{jn}) - \right. \\ \left. - \left(3n^4 + \frac{2}{c^2(1 - \nu)} \right) (k_{jn}C_{jn} + d_{jn}B_{jn}) + n^6E_{jn} \right], \\ C_{20}^{(2)} = -(1 - \nu^2)p_{20} - \frac{1}{c^2} \frac{p_{20}}{p_{20}^2 + g_{20}^2} + \eta(1 - \nu)^2 \left(d_{20} - \frac{\eta}{c^2} p_{20} - \frac{2a_1}{c^2(1 - \nu)} \right), \\ A_{jn} = (b_{jn}^2 - 3a_{jn}^2)b_{jn}C_{jn} - (a_{jn}^2 - 3b_{jn}^2)a_{jn}B_{jn}, \\ D_{jn}^{(1)} = \nu(k_{jn}C_{jn} + d_{jn}B_{jn}) - n^2E_{jn}, \quad E_{jn} = p_{jn}B_{jn} + g_{jn}C_{jn}, \\ d_{jn} = p_{jn}^2 - g_{jn}^2, \quad k_{jn} = 2p_{jn}g_{jn}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = R^2c^2(1 - \nu^2), \\ s_{jn} = a_{jn}^5 - 10a_{jn}^3b_{jn}^2 + 5a_{jn}b_{jn}^4, \quad t_{jn} = b_{jn}^5 - 10b_{jn}^3a_{jn}^2 + 5b_{jn}a_{jn}^4.$$

$A_{jn}^{(2)}, C_{jn}^{(2)}, D_{jn}^{(2)}$ получим из выражений для $A_{jn}^{(1)}, C_{jn}^{(1)}, D_{jn}^{(1)}$, заменяя в последних $C_{jn}, B_{jn}, E_{jn}, H_{jn}, A_{jn}, D_{jn}$ соответственно на $B_{jn}, -C_{jn}, H_{jn}, -E_{jn}, D_{jn}, -A_{jn}$. Таким же способом получим D_{jn} и H_{jn} из выражений для A_{jn} и E_{jn} , а $C_{20}^{(1)}$ — из $C_{20}^{(2)}$, заменяя $p_{20}, g_{20}, d_{20}, a_1$ соответственно на $-g_{20}, -p_{20}, -d_{20}, 0$. Отметим, что функции $K_{11}^0, K_{12}^0, K_{22}^0$ непрерывны для всего множества действительных значений s и u .

В новых переменных τ, t систему уравнений (10) представим в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_m(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{G_m(t)}{a_m(1 - \lambda^2 t^2)}, \quad |t| \leq 1 \quad (m = 1, 2), \quad (12)$$

где

$$\Omega_m(t) = \frac{F_m(t)}{1 - \lambda^2 t^2}, \quad G_m(t) = f_{m0}(t, 0) - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \Omega_j(\tau) \psi_{mj}(\tau, t) d\tau, \\ \psi_{11}(\tau, t) = 2K_{11}^0 |\omega(\tau, t)|, \quad \psi_{12}(\tau, t) = \psi_{21}(\tau, t) = 2K_{12}^0 |\omega(\tau, t)|, \\ \psi_{22}(\tau, t) = 2K_{22}^0 |\omega(\tau, t)|, \quad f_m(t, 0) = f_{m0} |\omega(t, 0)|, \\ \omega(\tau, t) = 2 \operatorname{Arth} \frac{\lambda(\tau - t)}{1 - \lambda^2 \tau t}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \frac{\mu_0 \mu}{2}, \quad t = \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \frac{\mu_0 s}{2}, \quad \lambda = \operatorname{th} \frac{\mu_0}{2}.$$

Представив функции ψ_{mj} рядами по λ , при малых значениях λ решение системы уравнений (12) получим в виде

$$\Omega_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{mn}(t) \lambda^n. \quad (13)$$

После определения функций $\Omega_m(t)$ для нахождения главной части усиления N_2 и момента M_2 на линии трещины в окрестности ее вершины достаточно ограничиться сингулярной частью ядра, т. е. принять

$$T_m = \frac{\sigma_m E h (1 - \lambda^2 t^2)}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_m(\tau)}{\tau - t} d\tau + o(1), \quad |t| > 1 \quad (m = 1, 2), \quad (14)$$

где

$$T_1 = N_2(t, 0), \quad T_2 = M_2(t, 0). \quad (15)$$

Отметим, что при $G' = \infty$ из системы (12) получим систему уравнений, приведенную в работе [2] для оболочки, уравнения которой записаны по теории Кирхгофа — Лява. Для случая, когда трещина расположена вдоль отрезка $\alpha = 0$, $|\beta| \leq \beta_0$, интегральные уравнения можно получить аналогично.

Рассмотрим отнесенную к декартовой прямоугольной системе координат x, y бесконечную трансверсально-изотропную пластинку, ослабленную периодической системой параллельных трещин $-a \leq x \leq a, y = 2kl, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Предположим, что берега трещины нагружены симметричными относительно середины трещины давлением и изгибающими моментами M_2^0 (равными по величине и противоположно направленными относительно линии трещины). В дальнейшем рассматривается случай, когда контакт между берегами трещин отсутствует.

Напряженное состояние в рассматриваемой пластине определяется как сумма напряженного состояния, обусловленного давлением (плоская задача) и напряженного состояния, вызванного изгибающими моментами. Уравнения, соответствующие плоской задаче совпадают с уравнениями, приведенными и исследованными в работе [2]. Поэтому далее определим коэффициенты интенсивности, вызванные изгибающими моментами.

В случае изгиба пластины дифференциальные уравнения для определения функций W и φ имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W = \nabla^2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}^0}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^0}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\kappa_1^0 + \nu \kappa_2^0) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\kappa_0^0 + \nu \kappa_1^0) - \\ - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \kappa_{12}^0}{\partial x \partial y}, \\ \nabla^2 \varphi - \delta^2 \varphi = \varepsilon (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\kappa_1^0 - \kappa_2^0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \kappa_{12}^0 \right] - \\ - \frac{\partial \varepsilon_{13}^0}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{23}^0}{\partial x}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\delta^2 = 2/\varepsilon (1 - \nu)$. Соответственно для определения функции $F(x)$ вместо системы (10) получим уравнение

$$\frac{1 - \nu^3}{8\pi} \mu \int_{-1}^1 F(u) \left\{ \operatorname{cth} \frac{\mu(u-s)}{2} + K[\mu(u-s)] \right\} du = \frac{M_2^0(s)}{D}, \quad |s| \leq 1, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{d}{dx} \kappa_2(x), \quad \mu = \frac{\pi a}{l}, \quad s = \frac{x}{2}, \\ K(z) = \frac{4}{1 + \nu} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{b_n} (e^{-\sqrt{1+b_n} |z|} - e^{-n |z|}) \operatorname{sgn} z + n z e^{-n |z|} \right] + \\ + (1 - z \operatorname{csch} z) \operatorname{cth} \frac{z}{2}, \quad b_n = \frac{\delta^2}{k_n}, \quad k_n = \frac{\pi n}{l}. \end{aligned}$$

Вводя новые переменные

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \frac{\mu u}{2}, \quad t = \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \frac{\mu s}{2}, \quad \lambda = \operatorname{th} \frac{\mu}{2} \quad (18)$$

в функцию $\Omega(t) = F(t)/(1 - \lambda^2 t^2)$, уравнение (17) записываем так:

$$\frac{1 - \lambda^2 t^2}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{M_2^0}{D(1 - \nu^2)} - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-1}^1 \Omega(\tau) K[\omega(\tau, t)] d\tau, \quad |t| \leq 1. \quad (19)$$

В случае, когда $G' = \infty$, уравнение (19) принимает вид

$$\frac{(3 - 2\nu - \nu^2)(1 - \lambda^2 t^2)}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{M_2^0}{D} - (1 - \nu)^2 \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-1}^1 \Omega(\tau) K(\tau, t, \lambda) d\tau, \quad |t| \leq 1, \quad (20)$$

где

$$K(\tau, t, \lambda) = \frac{1}{\gamma_0} - \left(\frac{1}{\gamma_0^2} - 1 \right) \operatorname{Arth} \gamma_0, \\ \gamma_0 = \frac{\lambda(\tau - t)}{1 - \lambda^2 \tau t}.$$

Представляя ядро $K[\omega(\tau, t)]$ рядом по степеням λ , решение уравнения (19) находим в виде

$$\Omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{2n}(t) \lambda^{2n}. \quad (21)$$

Определив функцию Ω , найдем главную часть момента M_2 на линии трещины в окрестности ее вершины:

$$M_2(t, 0) = \frac{D(1 - \nu^2)(1 - \lambda^2 t^2)}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega(\tau)}{\tau - t} d\tau + o(1), \quad |t| > 1. \quad (22)$$

Коэффициент интенсивности определим по формуле [4]

$$k = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} M_2, \quad (23)$$

где r — расстояние вдоль линии трещины от ее вершины.

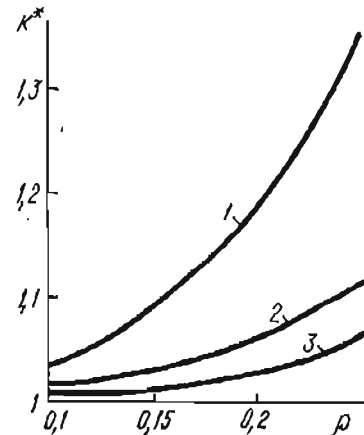
В случае, когда к берегам трещин приложены равномерно распределенные изгибающие моменты $M_2^0 = M$, для определения коэффициента интенсивности получим формулу

$$k = -M \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \sqrt{\lambda(1 - \lambda^2)} [1 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda^4 + c_3 \lambda^6 + c_4 \lambda^8 + o(\lambda^{10})], \quad (24)$$

где коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4 зависят от параметров $h/l, \nu, k', E/G'$. Для определения коэффициента интенсивности в случае изгиба бесконечной пластины с одной трещиной на основании решения уравнения (20) получим

$$k_0 = -M \sqrt{a}. \quad (25)$$

На рисунке приведены графики изменения коэффициента интенсивности в зависимости от роста длины трещины. По осям абсцисс и ординат отложены параметры $\rho = a/l$ и $k^* = k/k_0$. Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $\nu = 0,3$; $k' = \frac{5}{6}$; $h/l = 0,05$; $a/l \leq 0,25$. Для удобства вычислений ряд, входящий в ядро $K(z)$ уравнения (17), аппроксимирован полиномом седьмого порядка с погрешностью, не превышающей 5%. Кривыми 1, 2, 3 показано изменение коэффициента интенсивности при значении параметра E/G' , соответственно равном 20, 40, 60. Как видно из графиков, с увеличением параметра ρ коэффициент интенсивности монотонно возрастает, причем степень возрастания его при других фиксированных параметрах зависит от отношения E/G' .



ЛИТЕРАТУРА

1. Даревский В. М.— ПММ, 1952, 16, 2.
2. Осадчук В. А., Подстригач Я. С.— МТТ, 1973, 3.
3. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. «Наукова думка», К., 1973.
4. Ярема С. Я., Саврук М. П.— ДАН УРСР. Сер. А, 1969, 1.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1974 г.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ *

Р. Н. Швец, В. Д. Павленко,
И. И. Федик, А. П. Матковский

Распределение температурных напряжений в оболочках, ослабленных отверстиями, с учетом конвективного теплообмена с поверхностями мало исследовано [1]. Получены решения задач в основном для сферической оболочки [8, 10, 11], ослабленной одним или несколькими круговыми отверстиями, а для цилиндрической оболочки намечены общие пути решения такого рода задач [2]. Ниже приведены исследования температурных напряжений в цилиндрической оболочке с круговым отверстием при конвективном теплообмене.

Постановка задачи. Основные уравнения. Рассмотрим бесконечную изотропную цилиндрическую оболочку постоянной толщины $2h$ с круговым отверстием радиуса ρ на боковой поверхности, которая находится в условиях переменной температуры и теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона. Срединную поверхность упругой оболочки радиуса R отнесем к криволинейной ортогональной сопряженной системе координат x, y с началом в центре отверстия. Оси Ox и Oy направим соответственно по образующей и направляющей, ось Oz — по внешней нормали к срединной поверхности.

Учитывая локальность возмущенной зоны возле отверстия, напряженно-деформированное состояние оболочки будем описывать уравнениями плоских оболочек, которые в случае неравномерного ее нагрева имеют вид [1,8]

$$\Delta\Delta\Phi + i\gamma^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2Eh\alpha_l \Delta(iT_1 - \nu_0 T_2), \quad (1)$$

где

$$\Phi = E_0 w - i\varphi, \quad (2)$$

$$T_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T dz, \quad T_2 = \frac{2}{3h^2} \int_{-h}^h T z dz, \quad (3)$$

$\gamma^2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh}$, $\nu_0 = \sqrt{\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}}$, $E_0 = \frac{2Eh^3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}$, φ — функция напряжений, w — прогиб оболочки, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, α_l — коэффициент линейного расширения, T — температура оболочки.

Решение уравнения (1) запишем в виде суммы

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi_0, \quad (4)$$

где $\tilde{\Phi}$ — решение однородного уравнения, Φ_0 — частное решение (1).

* Основные результаты работы были доложены на XIII научном совещании по тепловым напряжениям в элементах конструкций (г. Канев, май 1974 г.).