ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Кіт Г. С.— ДАН УРСР. Сер. А, 1969, 5.
3. Кит Г. С., Хай М. В.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 1. «Наукова думка», К., 1975.
4. Кит Г. С., Лысый И. П.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 1. «Наукова думка», К., 1975.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М. 1966.

Львовский филиал
математической физики
Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ УЗКОЙ ПОЛОСЫ С ТРЕЩИНОЙ

Г. С. Кит, И. П. Лысый

Пусть в упругой бесконечной полосе шириной $2d$ имеется трещина длины $2l$, расположенная симметрично относительно граней полосы и начала координат. Рассмотрим задачу об определении в этой полосе стационарного температурного поля в предположении, что на ее гранях имеет место условие первого, второго или третьего рода, а берега трещины теплоизолированы. Введем безразмерные координаты, отнесенные к величине l, а также безразмерную ширину полосы $\delta = \frac{d}{l}$. Тогда граничные условия запишутся в таком виде:

$$T = T_{\pm\delta}(x), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = q_{\pm\delta}(x),$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \pm hl(T - T_c) = 0 \quad \text{при } y = \pm\delta, \quad |x| < \infty;$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (|x| \leqslant 1) \quad \text{при } y = 0,$$

где T — искомая температура, $T_{\pm\delta}$, $q_{\pm\delta}$ — температура и тепловой поток, заданные на гранях полосы, T_c — температура внешней среды, h — коэффициент теплообмена. Требуется определить температурное поле в полосе.

Температуру $T(x, y)$ представим в виде

$$T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y).$$

Здесь $t_0(x, y)$ — основное температурное поле в полосе без трещины, которое легко находится с помощью преобразования Фурье. Основная задача состоит в определении добавочного температурного поля $t(x, y)$, вызванного наличием трещины.

Так как функция $t(x, y)$ нечетная по y, достаточно рассмотреть полосу $0 \leqslant y \leqslant \delta$, на гранях которой добавочное температурное поле удовлетворяет следующим условиям:

$$t = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} + hlt = 0 \quad \text{при } y = \delta, \quad |x| < \infty,$$
$$t = 0 \quad (|x| \geqslant 1), \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\partial t_0(x, 0)}{\partial y} = f(x) \quad (|x| \leqslant 1) \quad \text{при } y = 0. \tag{1}$$

Применяя к уравнению теплопроводности $\Delta t = 0$ интегральное преобразование Фурье и учитывая граничные условия (1), для определения $t'(x) =$

$= \frac{\partial t(x.0)}{\partial x}$ получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{1} t'(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\delta}\right) d\xi = \pi\delta f(x) \qquad (|x| \leqslant 1, \quad y = 0), \tag{2}$$

$$K(w) = \int_0^\infty L(\eta) \sin(\eta w),$$

где для случая граничных условий первого, второго или третьего рода соответственно имеем

$$L(\eta) = \operatorname{cth}\eta, \quad L(\eta) = \operatorname{th}\eta, \quad L(\eta) = \frac{\eta \operatorname{th}\eta + hd}{\eta + hd \operatorname{th}\eta}. \tag{3}$$

При значениях параметра $\delta > 1$ решение указанной задачи рассматривалось в работе [4]. В данной работе найдем решение уравнения (2) при $\delta < 1$, т. е. для полосы малой относительной ширины. С этой целью используем метод, изложенный в работах [2, 3] и математический аппарат метода Винера — Хопфа [6].

Сделаем в уравнении (2) замену переменных $\xi = \delta\tau - 1$, $x = \delta\zeta - 1$, после чего это уравнение примет вид

$$\int_0^{2/\delta} t'(\tau) K(\tau - \zeta) d\tau = \pi\psi(\zeta). \tag{4}$$

Здесь функция $\psi(\zeta) = f(\delta\zeta - 1)$, причем она аналитически продолжается в область $2/\delta \leqslant \zeta < \infty$.

Уравнение (4) при малых значениях δ решается методом последовательных приближений. Для конкретных вычислений с достаточной точностью можно ограничиться нулевым приближением, которое определяется из уравнения

$$\int_0^\infty t'(\tau) K(\tau - \zeta) d\tau = \pi\psi(\zeta), \tag{5}$$

решение которого представляется как комбинация

$$t'(\tau) = \omega\left(\frac{1+\tau}{\delta}\right) - \omega\left(\frac{1-\tau}{\delta}\right) \tag{6}$$

решений $\omega(\tau)$ интегрального уравнения Винера — Хопфа вида (5). Для того чтобы получить решение уравнения Винера — Хопфа, пригодное для практического пользования, приходится прибегать к аппроксимации функций $L(\eta)$ подходящими выражениями с целью проведения точной факторизации [6].

Аппроксимируем функции $L(\eta)$ соответственно выражениями

$$L(\eta) = \frac{\eta^2 + D}{\eta\sqrt{\eta^2 + D^2}}, \quad L(\eta) = \frac{\eta\sqrt{\eta^2 + D^2}}{\eta^2 + D}, \quad L(\eta) = \frac{\eta^2 + Bhd}{\eta\sqrt{\eta^2 + (B_1 + hd)^2}}. \tag{7}$$

Легко видеть, что аппроксимация (7) верно отражает поведение функций $L(\eta)$ вида (3) в нуле и на бесконечности. При значении $D = 0{,}44$ погрешность аппроксимации первых двух формул (7) не превосходит 4,5% для всех $0 \leqslant \eta < \infty$. Погрешность аппроксимации третьей формулы (7) не превосходит 4,3% для всех $0 \leqslant \eta < \infty$ при $hd = 0{,}9$; $B = 0{,}8$; $B_1 = 0{,}6$. Для других значений hd также можно подобрать такие B и B_1, чтобы погрешность была минимальной.

Пример. Пусть на гранях полосы задана постоянная температура $T(x, \pm\delta) = \pm T_0$. Тогда $t_0(x, y) = \frac{T_0}{\delta} y$. В этом случае решение уравнения Винера — Хопфа вида (5) при аппроксимации (7) (первая формула) дается соотношением

$$\omega(\zeta) = \frac{T_0}{\sqrt{\delta 2\pi}}\left\{\frac{e^{-D\zeta}}{\sqrt{\zeta}} - 2(\sqrt{D} - D)^{1/2} e^{-\sqrt{D}\zeta} F[(\sqrt{D} - D)^{1/2}\sqrt{\zeta}]\right\},$$

$$F(z) = \int_0^z e^{u^2} du. \qquad (8)$$

Таблицы функции $F(z)$ приведены в работе [8]. Выражение для $t(x)$ на верхнем берегу трещины с учетом формул (6), (8) и условия $t(\pm 1) = 0$ имеет вид

$$t(x) = T_0\left\{\operatorname{erf}\gamma(x) + \operatorname{erf}\gamma(-x) - \operatorname{erf}\gamma(1) + \frac{2A}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-\frac{\gamma^2(x)}{\sqrt{D}}} F(A\gamma(x)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + e^{-\frac{\gamma^2(-x)}{\sqrt{D}}} F(A\gamma(-x)) - e^{-\frac{\gamma^2(1)}{\sqrt{D}}} F(A\gamma(1))\right]\right\}, \qquad (9)$$

$$\gamma(x) = \sqrt{\frac{D(1+x)}{\delta}}, \quad A = \left(\frac{1}{\sqrt{D}} - 1\right)^{1/2}.$$

Численные расчеты показали, что формулой (9) можно с надежностью пользоваться при $\delta < 1{,}3$. Тогда расхождение значений $t(x)$, вычисленных по приближенной (9) и точной [4] формулах не превосходит 4% при всех $|x| < 1$ и быстро уменьшается с уменьшением δ (таблица).

Значение $t(x)$	δ							
	1,5	1,3	1,1	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1
$t_т$	0,855	0,820	0,770	0,702	0,606	0,473	0,298	0,100
$t_п$	0,915	0,853	0,783	0,701	0,602	0,475	0,306	0,100

Определим коэффициенты интенсивности напряжений в свободной от внешних усилий полосе с трещиной, обусловленных возмущением основного температурного поля *. Эти коэффициенты легко найти, если известны производные по x от смещений берегов трещины [7]. В частности, в рассматриваемом случае коэффициент $k_1 = 0$, а коэффициент k_2 определяется по формуле

$$k_2 = \mp \frac{E\sqrt{l}}{2(1-\chi^2)} \lim_{x \to 1} \sqrt{1 - x^2}\, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x}, \qquad (10)$$

где $\chi = \nu$ в случае плоской деформации, $\chi = 0$ в случае плоского напряженного состояния, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, $u(x)$ — смещение верхнего берега трещины в направлении оси Ox, знаки «минус» и «плюс» соответствуют правому и левому концам трещины.

С помощью преобразования Фурье задача об определении производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ приводится к решению интегрального уравнения [5]

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) R\left(\frac{\xi - x}{\delta}\right) d\xi = 0, \qquad (11)$$

где

$$\varphi(x) = u'(x) - \beta t(x), \qquad \beta = \alpha(1 + \chi), \qquad (12)$$

$$R(w) = \int_0^\infty M(\eta) \sin \eta w\, d\eta, \qquad M(\eta) = 2\,\frac{\operatorname{sh}^2\eta - \eta^2}{\operatorname{sh} 2\eta - 2\eta}, \qquad (13)$$

* Коэффициенты интенсивности напряжений, обусловленных основным температурным полем, определяются путем решения задачи термоупругости для сплошной полосы с дальнейшим снятием усилий, возникающих на месте трещины.

α — коэффициент линейного теплового расширения. Найдем асимптотическое решение уравнения (11) при малых значениях δ, как комбинацию [1]

$$\varphi(\xi) = q\left(\frac{1+\xi}{\delta}\right) + q\left(\frac{1-\xi}{\delta}\right) - v(\xi), \tag{14}$$

где $q(\tau)$ и $v(\xi)$ — решения следующих интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty q(\tau) R(\tau - \zeta)\, d\tau = 0, \qquad 0 \leqslant \zeta < \infty, \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) R\left(\frac{\xi - x}{\delta}\right) d\xi = 0, \qquad |x| < \infty. \tag{16}$$

Уравнение (15) решается методом Винера — Хопфа. В этом случае функцию $M(\eta)$ аппроксимируем выражением

$$M(\eta) = \frac{\eta\sqrt{\eta^2 + N^2}}{\eta^2 + 2N}. \tag{17}$$

При значении $N = 0{,}78$ погрешность аппроксимации (17) не превосходит 6% при всех $0 \leqslant \eta < \infty$. Решение уравнения (16) находим после применения теоремы о свертках для интегрального преобразования Фурье. В частном случае, когда температура $t(x)$ на верхнем берегу трещины определяется по формуле (9), производная $u'(x)$, найденная описанным выше способом с учетом условия $u(\pm 1) = 0$, равна

$$u'(x) = \beta\left\{t(x) - \frac{P(\delta)}{2}\left[\Phi(x) + \Phi(-x) - 1\right]\right\}. \tag{18}$$

Здесь

$$P(\delta) = \left\{\left[\frac{\sqrt{\delta}}{s(1)} - \frac{1}{s^2(1)} + 2\right]\operatorname{erf} s(1) + \frac{2e^{-s(1)}}{\sqrt{\pi}\, s(1)} - 1\right\}^{-1} \int_{-1}^{1} t(x)\, dx,$$

$$s(x) = \sqrt{\frac{N(1+x)}{\delta}}, \quad \Phi(x) = \operatorname{erf} s(x) + \frac{\sqrt{N}\, e^{-s^2(x)}}{\sqrt{2\pi}\, s(x)}.$$

Подставляя найденное выражение для $u'(x)$ в формулу (10), для правого конца трещины получаем

$$k_2 = \frac{E\alpha\sqrt{\delta}\, P(\delta)\sqrt{l}}{4(1-\chi)\sqrt{\pi}}. \tag{19}$$

Как показали численные расчеты, формулой (19) с надежностью можно пользоваться при $\delta \leqslant 2$. Расхождение значений k_2, подсчитанных при $\delta = 2$ по формуле (19) и соответствующей формуле работы [5] для больших δ, не превосходит 1,6%. Таким образом, используя указанные выше формулы, можно определять коэффициенты интенсивности напряжений для полосы произвольной ширины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М.— В кн.: Концентрация напряжений, 2. «Наукова думка», К., 1968.
2. Александров В. М.— ПММ, 1973, 27, 5.
3. Александров В. М.— ПММ, 1964, 28, 3.
4. Кит Г. С., Лысый И. П.— ИФЖ, 1972, 22, 1.
5. Кит Г. С., Лысый И. П. — В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 1. «Наукова думка», К., 1975.
6. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. ИЛ, М., 1962.
7. Прикладные вопросы вязкости разрушения. «Мир», М., 1968.
8. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, М., 1959.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в августе 1974 г.