

$$T_c = T_{00}, \quad \Theta_c = T_{01} - \frac{1}{2} R_3 \sin 2\varphi T_{10}; \quad E_{ij} = \frac{1}{h^{i+j}} \int_{\Gamma_3} \varepsilon_2 x_i^j y_1^i dl;$$

$$T_{ij} = \frac{1}{h^{i+j}} \left[ \int_{\Gamma_3} \varepsilon_2 t_c^{(2)} x_i^j y_1^i dl + \int_D q x_i^j y_1^i dF \right];$$

$I_{x_1 x_1}, I_{y_1 y_1}, I_{x_1 y_1}$  — соответствующие моменты инерции относительно осей  $O_1 x_1, O_1 y_1$ ;  $X_c^{(1)}, Y_c^{(1)}$  — координаты центра тяжести поперечного сечения стержня в системе координат  $O_1 x_1 y_1$ ;  $k_1, k_2$  — главные кривизны срединной поверхности оболочки.

Если в соотношениях (18) — (19) перейти к пределу при  $F \rightarrow 0$ , то для неподкрепленного края оболочки по закону Ньютона получим условия теплообмена с внешней средой

$$\frac{\partial T_*}{\partial n_0} + 2\varepsilon h \left( T_* - \frac{1}{2h_*} \int_{-h_*}^{h_*} t_c dy_1 \right) = -2\lambda_\nu \Theta_* \cos \psi, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Theta_*}{\partial n_0} + 2\varepsilon h \left( \Theta_* - \frac{3}{2h_*^2} \int_{-h_*}^{h_*} t_c y_1 dy_1 \right) = 2\lambda_\nu \Theta_* \chi \cos \psi \quad (h_* = h \csc \psi).$$

При  $\psi = 0,5\pi$  условия (20) переходят в обычные граничные условия для оболочек [6], т. е. в условия для случая, когда торцевая поверхность оболочки ортогональна ее срединной поверхности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Береговой С. Г., Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1972, 3.
2. Караванский О. В. — Прикладная механика. 1970, 6, 7.
3. Коляно Ю. М. — ДАН УРСР, 1964, 12.
4. Коляно Ю. М. — В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.
5. Подстригач Я. С. — В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.
6. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. II. Гостехтеориздат, М., 1954.

Львовский филиал математической  
Физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
в августе 1974 г.

### ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛОСЕ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМИ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Г. С. Кит, М. В. Хай

Пусть упругая полоса, на свободных от внешних усилий гранях которой задана температура или тепловой поток, подвержена действию стационарного температурного поля  $t_0(x, y)$  и некоторых внешних нагрузок. Предположим, что такая полоса содержит  $N$  произвольно ориентированных прямолинейных термоизолированных трещин, берега которых не контактируют в процессе деформации.

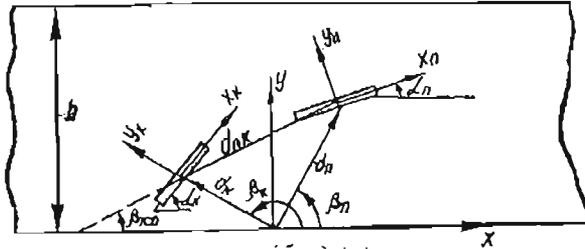
Выберем базисную систему координат  $xOy$  (ось  $Ox$  направлена вдоль нижней грани полосы, а ось  $Oy$  перпендикулярна к ней), а также локальные системы координат  $x_n O_n y_n$  с началом в центрах трещин (рисунок, см. стр. 21) и обозначим:  $\alpha_n$  — угол поворота оси  $O_n x_n$  ( $n$ -й трещины) относительно базисной системы  $xOy$ ,  $d_{nk}$  — расстояние между центрами  $n$ -й и  $k$ -й трещин,  $2a_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) — длина  $n$ -й трещины,  $d_n$  — расстояние центра  $n$ -й трещины от начала координат  $xOy$ ,  $\beta_{nk}$  — угол между положительным

направлением оси  $Ox$  и вектором, соединяющим центры  $n$ -й и  $k$ -й трещин.  $\beta_n$  — угол между вектором, соединяющим начало координат системы  $xOy$  с центром  $n$ -й трещины, и положительным направлением ося  $Ox$ ,  $h$  — ширина полосы.

Общую температуру в полосе с трещинами запишем в виде суммы

$$T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y), \quad (1)$$

причем температура возмущения  $t(x, y)$ , обусловленная наличием трещин, удовлетворяет таким граничным условиям: на гранях полосы 1)  $\frac{\partial t(x, y)}{\partial y} = 0$  или 2)  $t(x, y) = 0$  при  $y = 0, h$ ; на трещинах  $\frac{\partial t(x, y)}{\partial y_n} = -\frac{\partial t_0(x, y)}{\partial y_n}$  при



$y_n = 0, |x_n| \leq a_n$ . В зависимости от первого или второго условия на гранях полосы будем называть задачу теплопроводности соответственно задачей 1 или 2.

Известно [2], что в плоскости, ослабленной прямолинейной термоизолированной трещиной длины  $2a$ , температура возмущения представляется в виде

$$t(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{\gamma(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (2)$$

где  $\gamma(\xi)$  — неизвестная плотность интеграла типа Коши, определяемая из граничных условий на линии расположения трещины.

В случае полосы, ослабленной системой  $N$  произвольно ориентированных теплоизолированных трещин, представим температуру возмущения  $t(x, y)$  в базисной системе координат в виде

$$t(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [Ae^{i\xi z} + Be^{i\xi \bar{z}}] d\xi + \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-a_k}^{+a_k} \frac{\gamma_k(\xi)}{\xi - z_k^*} d\xi, \quad (3)$$

где

$$z_k^* = -d_k e^{i(\beta_k - \alpha_k)} + ze^{-i\alpha_k}, \quad z = x + iy. \quad (4)$$

а неизвестные функции  $A(\xi)$  и  $B(\xi)$  определим из условий на гранях полосы.

Учитывая тождество

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\xi u} du, \quad (5)$$

где  $f(x)$  — непрерывная интегрируемая функция, и удовлетворяя условиям на гранях полосы, выражаем неизвестные  $A$  и  $B$  через функции  $\gamma_k$ : для задачи 1

$$A = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 e^{-\omega}}{2\xi \operatorname{sh} \omega}, \quad B = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 e^{\omega}}{2\xi \operatorname{sh} \omega};$$

для задачи 2

$$A = \frac{\psi_2 - \psi_1 e^{-\omega}}{2 \operatorname{sh} \omega}, \quad B = -\frac{\psi_2 - \psi_1 e^{\omega}}{2 \operatorname{sh} \omega}, \quad \omega = \xi h,$$

где

$$\varphi_j = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-Q_k}^{+Q_k} \gamma'_k(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\alpha_k}}{\eta - z_{k0j}} \right] e^{-i\xi x} dx,$$

$$\psi_j = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-Q_k}^{+Q_k} \gamma_k(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\eta - z_{k0j}} \right] e^{-i\xi x} dx,$$

$$z_{k01} = -d_k e^{i(\beta_k - \alpha_k)} + x e^{-i\alpha_k}, \quad z_{k02} = z_{k01} + i h e^{-i\alpha_k} \quad (j = 1, 2).$$

Выражая  $x, y$  через  $x_n, y_n$ , т. е. переходя от базисной системы координат к локальной  $x_n O_n y_n$ , и удовлетворяя граничным условиям на линии трещины, получаем систему интегральных уравнений для определения производной  $\gamma_n(\xi)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{\gamma'_n(\xi)}{\xi - x_n} d\xi + \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{+a_k} \gamma'_k(\eta) Q_{nk}(\eta, x_n) d\eta = f_n(x_n), \quad |x_n| \leq a_n, \quad (6)$$

где

$$f_n(x_n) = -2 \frac{\partial t_0(x, y)}{\partial y_n} \Big|_{y_n=0}, \quad Q_{nk}(\eta, x_n) = (1 - \delta_{nk}) \Omega_{nk}(\eta, x_n) - P_{nk}(\eta, x_n),$$

$$\Omega_{nk}(\eta, x_n) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \{ e^{i\alpha_{nk}} S_{nk}^*(\eta, x_n) \},$$

$$S_{nk}^*(\eta, x_n) = [\eta - x_n e^{i\alpha_{nk}} - d_{nk} e^{i(\beta_{kn} - \alpha_k)}]^{-1},$$

$$P_{nk}(\eta, x_n) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \omega} \operatorname{Im} \{ e^{-i\alpha_n} [(-1)^s (e^{\omega} e_0^+ - e^{-\omega} e_0^-) + e^{-\omega} (e_1^+ - e_1^-)] \} d\xi.$$

Здесь

$$e_j^{\pm} = \exp(\pm i\xi z_{jkn}) \quad (j = 0, 1); \quad (7)$$

$$z_{0kn} = z_{0k} - \bar{z}_{0n}, \quad z_{1kn} = z_{0k} - \bar{z}_{0n}, \quad \alpha_{nk} = \alpha_n - \alpha_k,$$

$$z_{0k} = d_k e^{i\beta_k} + \eta e^{i\alpha_k}, \quad z_{0n} = d_n e^{i\beta_n} + x_n e^{i\alpha_n}, \quad (8)$$

$\delta_{nk}$  — символ Кронекера,  $s = 1$  соответствует задаче 1,  $s = 2$  — задаче 2.

Применяя к уравнениям (6) формулу обращения [1], получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$\gamma'_n(x_n) = -\frac{1}{\pi X_n(x_n)} \left[ \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{X_n(\xi)}{\xi - x_n} f_n(\xi) d\xi - \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{+a_k} \gamma'_k(\eta) R_{nk}(\eta, x_n) d\eta \right], \quad (9)$$

где

$$R_{nk}(\eta, x_n) = \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{X_n(\xi)}{\xi - x_n} Q_{nk}(\eta, \xi) d\xi, \quad X_n(\xi) = \sqrt{a_n^2 - \xi^2}.$$

Напряженное состояние полосы с трещинами представим в виде суммы двух составляющих. Первое из них имеет место в сплошной полосе и обусловлено температурой  $t_0(x, y)$  и внешними усилиями, второе — температурой возмущения и скачком перемещений на трещинах. Первое напряженное состояние будем считать известным.

Под действием температуры и внешних нагрузок берега трещин смещаются друг относительно друга, вследствие чего смещения терпят разрыв. Напряженное состояние бесконечной плоскости с произвольно ориентиро-

ванными теплоизолированными трещинами определяется через комплексные потенциалы [3]

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^N \Phi_k(z_k), \quad \Omega(z) = \sum_{k=1}^N \Omega_k(z_k),$$

где

$$\Phi_k(z) = \Omega_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a_k}^{+a_k} \frac{g_k(\eta)}{\eta - z} d\eta,$$

$$g_k(x) = \frac{1}{1+x} \left\{ 2\mu \frac{\partial}{\partial x} [v_k^+ - v_k^- - i(u_k^+ - u_k^-)] + im\gamma_k(x) \right\}, \quad (10)$$

$z_k$  определяется формулой (4),  $m = \alpha E$  для плоской деформации,  $m = \frac{\alpha E}{1+\nu}$  для плоского напряженного состояния,  $E$  — модуль упругости,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения.

Если известны  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$ , то комбинация нормальных  $N$  и касательных  $T$  напряжений на произвольной площадке с нормалью, составляющей угол  $\beta$  с осью абсцисс, определяется по формуле [5]

$$N - iT = \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - e^{-2i\beta} [\Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} - \overline{\Phi(z)}].$$

Напряжения  $N - iT$  в полосе с трещинами в системе координат  $xOy$  представим в виде

$$\begin{aligned} N - iT = & \frac{\mu i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \left\{ D e^{i\xi \bar{z}} - F e^{i\xi z} - e^{-2i\beta} \left[ \frac{2\mu}{\lambda + \mu} D - 2C - \right. \right. \\ & \left. \left. - i\xi (\bar{z} - z) D \right] e^{i\xi \bar{z}} \right\} d\xi + \sum_{k=1}^N \{ \Phi_k(z_k) + \overline{\Phi_k(\bar{z}_k)} - \\ & - e^{-2i(\beta - \alpha_k)} [\Omega_k(\bar{z}_k) + (z_k - \bar{z}_k) \overline{\Phi_k'(z_k)} - \overline{\Phi_k(z_k)}] \}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\Phi_k(z_k) = \Omega_k(z_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-Q_k}^{+Q_k} \frac{g_k(\xi)}{\xi - z e^{-i\alpha_k} + d_k e^{i(\beta_k - \alpha_k)}} d\xi,$$

$\lambda$  и  $\mu$  — постоянные Ламе.

Учитывая тождество (5) и удовлетворяя условиям на границах полосы (свободным от внешних усилий), выражаем  $D$ ,  $F$ ,  $C$  через функции  $g_k(\xi)$ . Удовлетворяя далее условиям на линиях расположения трещин, получаем интегральные уравнения для определения  $g_k(\xi)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{g_n(\eta)}{\eta - x_n} d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{+a_k} [g_k(\eta) M_{nk}(\eta, x_n) + \overline{g_k(\eta)} N_{nk}(\eta, x_n)] d\eta = \\ = -\sigma_{0n}(x_n) + i\tau_{0n}(x_n), \quad |x_n| \leq a_n. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\sigma_{0n}(x_n)$ ,  $\tau_{0n}(x_n)$  — нормальные и касательные напряжения в сплошной полосе на линии расположения  $n$ -й трещины,

$$\begin{aligned} M_{nk}(\eta, x_n) &= (1 - \delta_{nk}) K_{nk}(\eta, x_n) - K_{0nk}(\eta, x_n), \\ N_{nk}(\eta, x_n) &= (1 - \delta_{nk}) L_{nk}(\eta, x_n) - L_{0nk}(\eta, x_n), \\ K_{nk}(\eta, x_n) &= \overline{S_{nk}(\eta, x_n)} + e^{2i\alpha_{kn}} S_{nk}(\eta, x_n), \end{aligned}$$

$$L_{\alpha}(\eta, x) = S_{\alpha}(\eta, x) - \frac{e^{2i\alpha kn} S_{nk}^2(\eta, x_n)}{S_{nk}(\eta, x_n)},$$

$$S_{\alpha}(\eta, x) = \frac{i}{2} [\eta - x_n e^{i\alpha kn} - d_{nk} e^{i(\alpha_k - \beta_{kn})}]^{-1};$$

$$K_{\alpha}(\eta, x) = -\frac{z^{-\alpha}}{2} \{I_1(\eta, \bar{z}_n) + \overline{I_2(\eta, \bar{z}_n)} - e^{-2i\alpha n} [I_1(\eta, \bar{z}_n) + \\ + \overline{I_2(\eta, z_n)} - iI_3(\eta, \bar{z}_n) + iI_5(\eta, \bar{z}_n)]\},$$

$$L_{\alpha}(\eta, x_n) = -\frac{e^{-i\alpha k}}{2} \{I_2(\eta, \bar{z}_n) + \overline{I_1(\eta, \bar{z}_n)} - e^{-2i\alpha n} [I_2(\eta, \bar{z}_n) + \\ + \overline{I_1(\eta, z_n)} + iI_4(\eta, z_n) + iI_6(\eta, \bar{z}_n)]\};$$

$$I_1(\eta, \bar{z}_n) = \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\Delta} [ih(f_{s0} - f_{s1}) - \bar{z}_{0kk} \operatorname{sh} \omega (e^{-\omega} f_{c0} + \operatorname{sh} \omega e_0^+)] d\xi,$$

$$I_2(\eta, \bar{z}_n) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} [ie^{-\omega} \operatorname{sh} \omega (f_{s0} - f_{s1}) + i \operatorname{sh}^2 \omega e_0^+ + \xi \omega z_{0kk} f_{c1} - \omega^2 e_1^+] d\xi,$$

$$I_3(\eta, \bar{z}_n) = \int_0^{\infty} (e_1^- - e_0^+) d\xi, \quad I_4(\eta, z_n) = i \int_0^{\infty} \xi z_{0kk} e_1^- d\xi,$$

$$I_5(\eta, \bar{z}_n) = \bar{z}_{0nn} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2}{\Delta} [ih(f_{c1} - f_{c0}) + \bar{z}_{0kk} (e^{-\omega} \operatorname{sh} \omega f_{s0} + \operatorname{sh}^2 \omega e_0^+)] d\xi,$$

$$I_6(\eta, \bar{z}_n) = \bar{z}_{0nn} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\Delta} [ie^{-\omega} \operatorname{sh} \omega (f_{c1} - f_{c0}) - \xi \omega z_{0kk} f_{s1} - i \operatorname{sh}^2 \omega e_0^+ + \omega^2 e_1^+] d\xi,$$

где  $f_{sj} = \operatorname{sh} i\xi z_{jkn}$ ,  $f_{cj} = \operatorname{ch} i\xi z_{jkn}$ ,  $\Delta = \omega^2 - \operatorname{sh}^2 \omega$ ,  $z_{0kk} = z_{0k} - \bar{z}_{0k}$ ,  $z_{0nn} = z_{0n} - \bar{z}_{0n}$ ,  $e_j^{\pm}$  определяется формулой (7),  $z_{0kn}$  и  $z_{1kn}$  — формулами (8), а черта сверху означает комплексно-сопряженную величину.

Применяя к уравнению (12) формулу обращения, для определения  $g_n(x_n)$  получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода:

$$g_n(x_n) = \frac{1}{\pi X_n(x_n)} \left\{ \frac{mi}{1+x} \int_{-a_n}^{+a_n} \gamma_n(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{+a_k} [g_k(\eta) F_{nk}(\eta, x_n) + \right. \\ \left. + \overline{g_k(\eta)} E_{nk}(\eta, x_n)] d\xi + \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{X_n(\xi) |\sigma_{0n}(\xi) - i\tau_{0n}(\xi)|}{\xi - x_n} d\xi \right\}, \quad (13)$$

где

$$F_{nk}(\eta, x_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{X_n(\xi)}{\xi - x_n} M_{nk}(\eta, \xi) d\xi,$$

$$E_{nk}(\eta, x_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{X_n(\xi)}{\xi - x_n} N_{nk}(\eta, \xi) d\xi.$$

Решая уравнения (9) и (13), определяем функции  $\gamma_n'(x_n')$  и  $g_n(x_n)$ , а используя формулы (3) и (11), находим распределение температуры и напряжений.

В механике разрушения важную роль играют коэффициенты интенсивности напряжений, которые характеризуют устойчивость тела по отношению к распространению в нем трещин. Коэффициенты интенсивности напряжений определяются через  $g_n(x_n)$  по формуле

$$k_{1n} - ik_{2n} = \mp \lim_{x_n \rightarrow \pm a_n} \left[ \frac{V' \pi X_n(x_n)}{V a_n} g_n(x_n) \right] \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (14)$$

В качестве примера рассмотрим полосу, ослабленную одной центральной произвольно ориентированной трещиной длины  $2a$ , когда  $t_0(x, y) = q(x \cos \chi + y \sin \chi)$ . Полагая  $\alpha_n = \alpha_k = \varphi$ ,  $\beta_n = \beta_k = \frac{\pi}{2}$ ,  $d_n = \frac{h}{2}$ , записываем выражения для коэффициентов интенсивности напряжений: для задачи 1

$$k_2^{(1)}(\pm a) = \pm k_\infty \sin(\chi - \varphi) \{1 + [\rho_1(\varphi) - \tau_1(\varphi)] \delta^2 + [\rho_2(\varphi) + \tau_2(\varphi) - \rho_1(\varphi) \tau_1(\varphi)] \delta^4 + O(\delta^6)\}, \quad (15)$$

$$k_1^{(1)}(\pm a) = \pm k_\infty \sin(\chi - \varphi) \{r_1(\varphi) \delta^2 + [r_1(\varphi) \tau_1(\varphi) - r_2(\varphi)] \delta^4 + O(\delta^6)\},$$

для задачи 2

$$k_2^{(2)}(\pm a) = k_2^{(1)}(\pm a) \mp k_\infty \sin(\chi - \varphi) \frac{\delta^2}{16} \left( \pi^2 - \frac{\cos \varphi}{32} \delta^2 \right), \quad (16)$$

$$k_1^{(2)}(\pm a) = k_1^{(1)}(\pm a) \mp k_\infty \sin(\chi - \varphi) r_1(\varphi) \frac{\delta^4}{32},$$

где

$$\delta = 2a/h, \quad k_\infty = \sqrt{\pi} m q a^{1/2} / (1 + \nu),$$

$$96\tau_1(\varphi) = \pi^2 (3 - \cos 2\varphi), \quad 45 \cdot 2^{10} \tau_2(\varphi) = \pi^4 (45 + 5 \cos^2 2\varphi - 75 \cos 2\varphi + 3 \cos 4\varphi),$$

$$4\rho_1(\varphi) = 2A_2 + (J_1 - 4A_2) \cos 2\varphi + 2(I_1 - A_2 + 4E_4) \cos 4\varphi,$$

$$32\rho_2(\varphi) = -J_1 - 2J_3 + (8A_4 - 2I_3 + J_1 - J_3) \cos 4\varphi - 4(7A_4 - 2E_4) \cos 2\varphi - (10A_4 + 40E_4 - 3J_1) \sin^2 \varphi - 2(E_4 + 16E_6 + 2I_3 - A_4) \times \\ \times \cos 6\varphi + 40E_4 \sin \varphi \sin 3\varphi + 64E_4 \sin^2 \varphi \cos 4\varphi - 10(J_1 - 4I_3) \sin \varphi \cos 5\varphi,$$

$$4r_1(\varphi) = (2I_1 - J_1 + 4A_2) \sin 2\varphi - 2(4E_4 + I_1 - A_2) \sin 4\varphi,$$

$$8r_2(\varphi) = 2(6E_4 - A_4) \sin 2\varphi - 2(2E_4 + 4E_6 - 2I_3 + A_4) \sin 6\varphi - \\ - (J_3 - 8A_4 - 4I_3) \sin 4\varphi + 64E_4 \sin^2 \varphi \sin 4\varphi - 8E_4 \sin \varphi \sin 3\varphi - \\ - 5J_1 \cos \varphi \sin \varphi + 5(J_1 - 4I_3) \sin \varphi \cos 5\varphi + 4(A_4 + E_4) \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$I_n = \int_0^\infty \frac{x^n (\operatorname{sh} 2x - e^{-2x} \operatorname{sh} 2x - 4x^2)}{4x^2 - \operatorname{sh}^2 2x} dx, \quad J_n = 4 \int_0^\infty \frac{x^{n+2} \operatorname{sh} 2x}{4x^2 - \operatorname{sh}^2 2x} dx,$$

$$A_n = \int_0^\infty \frac{x^n (\operatorname{ch} 2x - 1)}{4x^2 - \operatorname{sh}^2 2x} dx, \quad E_n = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{4x^2 - \operatorname{sh}^2 2x}.$$

Заметим, что при  $\varphi = 0$ ,  $\chi = \frac{\pi}{2}$  формулы (16) совпадают с полученными в работе [4]. Полагая в формулах (15)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\chi = 0$ , что соответствует полосе с термоизолированными гравнями, содержащей центральную поперечную трещину, получаем

$$k_2(\pm a) = \pm k_\infty [1 + 0,5110\delta^2 + 0,7761\delta^4 + 0,3399\delta^6 + O(\delta^8)]. \quad (17)$$

Анализ формулы (17) показывает, что ее можно использовать при  $\delta < 0,7$  с достаточной на практике точностью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Кит Г. С. — ДАН УРСР. Сер. А, 1969, 5.
3. Кит Г. С., Хай М. В. — В кн.: Математические методы и физико-механические поля, I. «Наукова думка», К., 1975.
4. Кит Г. С., Лысый И. П. — В кн.: Математические методы и физико-механические поля, I. «Наукова думка», К., 1975.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М. 1966.

Львовский филиал  
математической физики  
Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
в сентябре 1974 г.

## ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ УЗКОЙ ПОЛОСЫ С ТРЕЩИНОЙ

Г. С. Кит, И. П. Лысый

Пусть в упругой бесконечной полосе шириной  $2d$  имеется трещина длины  $2l$ , расположенная симметрично относительно граней полосы и начала координат. Рассмотрим задачу об определении в этой полосе стационарного температурного поля в предположении, что на ее гранях имеет место условие первого, второго или третьего рода, а берега трещины теплоизолированы. Введем безразмерные координаты, отнесенные к величине  $l$ , а также безразмерную ширину полосы  $\delta = \frac{d}{l}$ . Тогда граничные условия запишутся в таком виде:

$$T = T_{\pm\delta}(x), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = q_{\pm\delta}(x),$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \pm hl(T - T_c) = 0 \quad \text{при } y = \pm\delta, \quad |x| < \infty;$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (|x| \leq 1) \quad \text{при } y = 0,$$

где  $T$  — искомая температура,  $T_{\pm\delta}$ ,  $q_{\pm\delta}$  — температура и тепловой поток, заданные на гранях полосы,  $T_c$  — температура внешней среды,  $h$  — коэффициент теплообмена. Требуется определить температурное поле в полосе.

Температуру  $T(x, y)$  представим в виде

$$T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y).$$

Здесь  $t_0(x, y)$  — основное температурное поле в полосе без трещины, которое легко находится с помощью преобразования Фурье. Основная задача состоит в определении добавочного температурного поля  $t(x, y)$ , вызванного наличием трещины.

Так как функция  $t(x, y)$  нечетная по  $y$ , достаточно рассмотреть полосу  $0 \leq y \leq \delta$ , на гранях которой добавочное температурное поле удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} + hlt = 0 \quad \text{при } y = \delta, \quad |x| < \infty, \\ t = 0 \quad (|x| \geq 1), \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\partial t_0(x, 0)}{\partial y} = f(x) \quad (|x| \leq 1) \quad \text{при } y = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Применяя к уравнению теплопроводности  $\Delta t = 0$  интегральное преобразование Фурье и учитывая граничные условия (1), для определения  $t'(x) =$