О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

В. А. Палых

Известно, что задача Коши для уравнений Эйнштейна

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 0, \ \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

представляет собой задачу с инволюцией в смысле Э. Картана. В α^0-уравнения не входят вторые производные по времени, поэтому данные Коши на гиперповерхности S, задаваемой в локальной карте уравнением $x^0 = 0$, не являются произвольными и должны удовлетворять уравнениям связей

$$S^0_\alpha = 0. \tag{2}$$

Согласно теореме Лихнеровича об инволюции [9], если уравнения связей удовлетворяются на начальной гиперповерхности $x^0 = 0$, то они удовлетворяются и в ее окрестности. Уравнения

$$S^i_j = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{3}$$

определяют эволюцию решения во времени.

Уравнения (1) не являются независимыми в силу свернутых тождеств Бианки

$$S^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0 \tag{4}$$

и, следовательно, систему (1) необходимо доопределить, задав четыре уравнения для компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, т. е. так называемые координатные условия, ограничивающие произвольность в выборе координатной системы.

В работах [9—12] доказана корректность постановки задачи Коши при использовании координатных условий де Дондера («гармонических координат»):

$$g^{\alpha\beta}\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\nu\nu})}{\partial x^\nu} = 0. \tag{5}$$

В работах [1, 5] задача Коши рассматривается в гауссовых нормальных координатах. Вопрос о корректности постановки задачи Коши для систем уравнений в частных производных решается, как известно, в зависимости от их типа по классификации И. Г. Петровского [6].

Общепринятым является утверждение о том, что система уравнений Эйнштейна является системой гиперболического типа [2—4], основывающееся, с одной стороны, на приведении в гармонических координатах системы уравнений (1) к диагональному виду по вторым производным и совпадении характеристик каждого уравнения системы с характеристиками общековариантного уравнения Даламбера и, с другой стороны — на интуитивных представлениях о гиперболичности уравнений поля. Однако, строго говоря, вследствие недоопределенности системы уравнений Эйнштейна и требования потери ковариантности при ее доопределении это утверждение является законным и доказанным при доопределении системы уравнений только условиями гармоничности (5) либо условиями

$$g^{00} = 1, \; g^{0i} = 0, \tag{6}$$

определяющими гауссовы нормальные координаты. В то же время очевидно, что не каждое доопределение системы уравнений в частных производных может дополнить ее до системы определенного типа. Отметим, что Ф. И. Франкль [8], используя координатные условия

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha,00}}{\partial x^0} = 0, \tag{7}$$

вопрос о типе системы гравитационных уравнений оставил открытым из-за «...больших осложнений», возникающих в произвольных, отличных от гармонической, системах координат.

Далее, рассмотрим случай задания координатных условий с помощью любых четырех из 10 искомых компонент метрического тензора. При этом уравнения эволюции (3) являются системой шести квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка для шести неизвестных функций. Поскольку функции $g_{\alpha\beta}$ входят в уравнения (3) различным образом, то вследствие задания 210 различных комбинаций из четырех компонент метрического тензора получаем 210 систем таких уравнений. Исследуем, к какому типу по классификации И. Г. Петровского принадлежат данные системы.

Используя для тензора Риччи его выражение через компоненты метрического тензора

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} \right) +$$

$$+ g_{\rho\sigma} g^{\alpha\beta} \left(\Gamma^\sigma_{\alpha\rho} \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} \right), \tag{8}$$

строим характеристические детерминанты этих систем. В результате вычислений получаем, что все характеристические детерминанты обращаются в нуль при некоторых действительных a_1, a_2, a_3, не обращающихся в нуль одновременно, за исключением того случая, когда система уравнений доопределяется заданием функций g^{00}, g^{01}, g^{02} и g^{03}. В последнем случае характеристический детерминант имеет вид

$$\left| \begin{array}{cc} g^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + g^{11} x_1^2 - 2 g^{1\beta} x_1 x_\beta & g^{22} x_1^2 \\ g^{11} x_2^2 & g^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + g^{22} x_2^2 - 2 g^{\beta 2} x_2 x_\beta \\ g^{11} x_3^2 & g^{22} x_3^2 \\ g^{11} x_1 x_2 - g^{\alpha 1} x_\alpha x_2 & g^{22} x_1 x_2 - g^{\beta 2} x_1 x_\beta \\ g^{11} x_1 x_3 - g^{\alpha 1} x_\alpha x_3 & g^{22} x_1 x_3 \\ g^{11} x_2 x_3 & g^{22} x_2 x_3 - g^{\alpha 2} x_\alpha x_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{cc} g^{33} & 2 g^{12} x_1^2 - 2 g^{\beta 2} x_1 x_\beta \\ g^{33} x_2^2 & 2 g^{12} x_2^2 - 2 g^{\beta 1} x_\beta x_2 \\ g^{\alpha\beta} x_\alpha g_\beta + x^{33} x_3^2 - 2 g^{\beta 3} x_\beta x_3 & 2 g^{12} x_3^2 \\ g^{33} x_1 x_2 & g^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + 2 g^{12} x_1 x_2 - g^{1\beta} x_1 x_\beta - g^{\alpha 2} x_\alpha x_2 \\ g^{33} x_1 x_3 - g^{\beta 3} x_\beta x_1 & 2 g^{12} x_1 x_3 - g^{\alpha 2} x_\alpha x_3 \\ g^{33} x_2 x_3 - g^{\beta 3} x_\beta x_2 & 2 g^{12} x_2 x_3 - g^{\alpha 1} x_\alpha x_3 \end{array}$$

$$
\begin{matrix}
2g^{13}x_1^2 - 2g^{\beta 3}x_1 x_\beta & 2g^{23}x_1^2 \\
2g^{13}x_2^2 & 2g^{23}x_2^2 - 2g^{\beta 3}x_\beta x_2 \\
2g^{13}x_3^2 - 2g^{\beta 1}x_\beta x_3 & 2g^{23}x_3^2 - 2g^{\beta 2}x_\beta x_3 \\
2g^{13}x_1 x_2 - g^{\alpha 3}x_\alpha x_2 & 2g^{23}x_1 x_2 - g^{\beta 3}x_1 x_\beta \\
g^{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta + 2g^{13}x_1 x_3 - g^{\beta 1}x_\beta x_1 - g^{\alpha 3}x_\alpha x_3 & 2g^{23}x_1 x_3 - g^{\beta 2}x_\beta x_1 \\
2g^{13}x_2 x_3 - g^{\beta 1}x_\beta x_2 & g^{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta + 2g^{23}x_2 x_3 - g^{\beta 2}x_\beta x_2 - g^{\alpha 3}x_\alpha x_3
\end{matrix}
\Bigg| . \tag{9}
$$

После громоздких преобразований и вычислений детерминант приводится к виду

$$g^{00}\lambda^2 (g^{00}\lambda^2 + g^{01}\lambda a_1 + g^{02}\lambda a_2 + g^{03}\lambda a_3)^2 (g^{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta)^3.$$

Из условия действительности его корней λ при любых действительных a_i таких, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$, следуют условия

$$g^{00} > 0, \ g^{ij}x_i x_j < 0, \tag{10}$$

совпадающие с известными условиями Гильберта для компонент метрического тензора во всякой системе отсчета, которая может быть осуществлена с помощью реальных тел. В частном случае задания $g^{0\alpha}$ ($g^{00} = 1$, $g^{0i} = 0$) отсюда следует гиперболичность по И. Г. Петровскому уравнений Эйнштейна в полугеодезической (и, вообще, гауссовой) системе координат при выполнении в локальной карте условий Гильберта.

При задании координатных условий с помощью четырех функций, не совпадающих с набором g^{00}, g^{01}, g^{02}, g^{03}, вследствие вырождения характеристического детерминанта задача Коши для уравнений Эйнштейна не является корректно поставленной. Поэтому задача Коши будет некорректно поставленной при использовании нулевых координат Синга [7].

Используя полученные результаты, можно расширить класс координатных условий, дополняющих уравнения Эйнштейна до системы гиперболического типа, на некоторые виды координатных условий, задаваемых уравнениями в частных производных второго порядка. Заметим, что в уравнения Эйнштейна не входят вторые производные вида $\frac{\partial^2 g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ и $\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}$ (α, $\beta = 0, 1, 2, 3$), что является следствием алгебраических свойств тензора кривизны R_{ijkm} (среди этих производных есть и «несущественные» по Лихнеровичу производные $\frac{\partial^2 g_{0\alpha}}{\partial x^{02}}$).

При задании координатных условий уравнениями в частных производных первого и второго порядков уравнения эволюции являются, вообще говоря, системой десяти уравнений для десяти неизвестных функций. В случае, когда координатные условия задаются в виде уравнений в частных производных, содержащих производные вида $\frac{\partial^2 g_{\alpha\alpha}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ и $\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ от четырех функций, характеристический детерминант системы можно представить в виде произведения двух детерминантов: четвертого порядка, ассоциированного с уравнениями координатных условий, и шестого порядка, не вырождающегося лишь тогда, когда в координатных условиях фигурируют производные от $g^{0\alpha}$. Следовательно, в этом случае уравнения Эйнштейна гиперболические при задании координатных условий гиперболическими уравнениями второго порядка, содержащими только производные $\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^0 \partial x^\gamma}$, $\frac{\partial^2 \partial_{0\beta}}{\partial x^{02}}$ и $\frac{\partial^2 g_{0\alpha}}{\partial x^{\alpha 2}}$.

Интересно отметить, что уравнения Эйнштейна, если не налагать никаких добавочных условий на выбор координатных условий, допускают возможность существования 12 действительных и восьми комплексных корней характеристического детерминанта. Для этого достаточно задать координатные условия уравнениями эллиптического типа с производными $\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^0 \partial x^\nu}$, $\frac{\partial^2 g_{0\beta}}{\partial x^{02}}$, $\frac{\partial^2 g_{0\alpha}}{\partial x^{\alpha 2}}$.

Если записать координатные условия Франкля (7) как условия на компоненты метрического тензора:

$$\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{02}} = 0, \quad 2\frac{\partial^2 g_{01}}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^0 \partial x^1} = 0,$$
$$2\frac{\partial^2 g_{02}}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^0 \partial x^2} = 0, \quad 2\frac{\partial^2 g_{03}}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^0 \partial x^3}, \qquad (11)$$

то из полученных выше необходимых и достаточных условий гиперболичности следует гиперболичность уравнений Эйнштейна при использовании координатных условий Франкля.

Итак, условия Гильберта не являются достаточными условиями гиперболичности уравнений Эйнштейна в локальной карте, и для гиперболичности уравнений необходимо выделить классы определенных координатных условий, согласовывая их в этом смысле с уравнениями поля гравитации, как это сделано в данной работе для некоторых типов координатных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гравитация и топология. «Мир», М., 1966.
2. Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. «Наука», М., 1972.
3. Инфельд Л., Плебаньский Е. Движение и релятивизм. ИЛ, М., 1962.
4. Кучеренко А. И., Лоскутов А. В. — ДАН СССР, 1974, 215, 5.
5. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. «Наука», М., 1966.
6. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Гостехиздат, М., 1961.
7. Синг Дж. Общая теория относительности. ИЛ, М., 1963.
8. Франкль Ф. И.— ДАН СССР, 1952, 84, 1.
9. Lichnerowicz A. Theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme, Masson Cie, Paris, 1954.
10. Mme Foures-Bruhat G.— Acta Mathematica, 1952, 88, 1—2.
11. Mme Foures-Bruhat Y.— J. Rat. Mech., 1954, 5.
12. Mme Foures et Lichnerowicz A.— Compt. Rend. Acad. Sci., 1948, 226.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1974 г.

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, РАСПАДАЮЩИХСЯ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Н. Полищук, Б. И. Пташник

В данной статье, являющейся развитием работы [3], изучается периодическая краевая задача (по переменной t) для гиперболического оператора с многими пространственными переменными, распадающегося на линейные множители первого порядка с постоянными коэффициентами. Исследуются случаи простых и кратных множителей в разложении оператора.

В дальнейшем используются такие обозначения:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m); \quad k = (k_1, k_2, \ldots, k_m); \quad |k| = |k_1| + |k_2| + \cdots$$
$$\cdots + |k_m|; \quad (k, x) = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_mx_m;$$
$$D = \{t, x : 0 \leqslant t \leqslant T < \infty; \quad -\infty < x_p < +\infty, \ p = 1, 2, \ldots, m\};$$