Подставляя теперь решение (3) в граничные условия (2) и приравнивая нулю определитель соответствующей алгебраической системы, получаем характеристический полином рассматриваемой задачи в виде

$$A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 = 0, \qquad \lambda = \omega^2. \tag{7}$$

Заметим, что корни полинома (7) отрицательны, если

$$A_2 > 0, \quad A_1^2 - 4A_0A_2 > 0. \tag{8}$$

Рассмотрим, в частности, случай нагружения стержня аксимальным моментом $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Тогда

$$A_0 = (s_1''' + \alpha s_2'')^2 + (s_2''' - \alpha s_1'')^2 \geqslant 0; \tag{9}$$

$$A_1^2 - 4A_0A_2 = -[r_1(q_{11}q_{14} - q_{12}q_{13}) + r_2(q_{11}q_{13} + q_{12}q_{14}) - (q_{11}^2 + q_{12}^2)]^2 \leqslant 0, \tag{10}$$

где

$$q_{11} = s_1''' + \alpha s_2''; \quad q_{13} = s_1'' + \lambda s_2'; \quad r_1 = -\frac{M}{EI}s_1'; \quad r_2 = -\frac{M}{EI}s_3';$$

$$q_{12} = s_3''' + \alpha s_4''; \quad q_{14} = s_3'' + \alpha s_4'; \quad r_3 = -\frac{M}{EI}s_3.$$

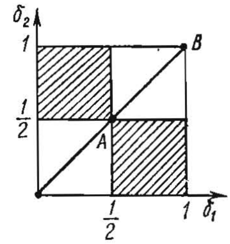

Рис. 1.

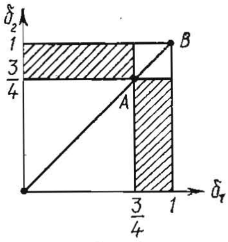

Рис. 2.

Из выражения (10) следует, что стержень неустойчив уже при малых значениях L (при $L=0$ в (10) имеем равенство).

Для других рассмотренных случаев поведения вектора скручивающего момента ($0 < \delta_1$, $\delta_2 \leqslant 1$) выполнение условий (8) проверялось путем вычислений. Оказалось, что а) при $GI_k = \infty$ (без учета деформации кручения), кроме известных случаев [3, 4], существует множество точек (δ_1, δ_2), которым соответствует устойчивость прямолинейной формы равновесия при значениях параметров, меньших от критических (заштрихованная область на рис. 1); б) учет деформации кручения существенно меняет это множество; например, при $\frac{EI}{GI_k} = \frac{1}{4}$ стержень устойчив, когда δ_1 и δ_2 принимают значения из заштрихованной области на рис. 2; в) в указанных случаях потеря устойчивости происходит по Эйлеру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балінський А. І., Зорій Л. М.— ДАН УРСР, 1971, 3.
2. Вязьменский С. П.— Инженерный сборник, 1959, 25.
3. Николаи Е. Л. Труды по механике. Гостехиздат, М., 1955.
4. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

О ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНКАХ ВЫСШИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Л. М. Зорий, Р. М. Таций

В работах [1, 2] получены представления характеристических уравнений некоторых многопараметрических задач на собственные значения в виде рядов. Покажем, что использование таких представлений приводит к упрощению вычислений известных двусторонних оценок (см., например, [3]) для высших собственных значений и позволяет распространить эти оценки на многопараметрические задачи.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Mu - \lambda Nu = 0, \tag{1}$$

где M и N — линейные положительно определенные дифференциальные операторы, зависящие, вообще говоря, от нескольких параметров. Известно [3], что если ряд

$$C_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^\nu}, \tag{2}$$

где λ_i — собственные значения задачи (1), сходится, то имеют место оценки

$$\left(C_\nu - C_{\nu n} + \frac{1}{\lambda_{kn}^\nu}\right)^{-\frac{1}{\nu}} \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_{kn}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Здесь λ_{kn} — n-е приближение по Ритцу к собственному значению λ_k, а $C_{\nu n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{in}^\nu}$.

Пусть характеристическое уравнение задачи (1) представлено в виде

$$c_0 - c_1\lambda + c_2\lambda^2 - c_3\lambda^3 + \cdots = 0. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что величины C_ν, входящие в оценки (3), можно вычислять по формулам

$$c_0 C_1 = c_1, \; c_0 C_\nu = \sum_{k=1}^{\nu-1} (-1)^k c_k C_{\nu-k} + (-1)^{\nu+1} \nu \cdot c_\nu . \tag{5}$$

При этом $C_{\nu n}$, отвечающие указанному выше приближению по Ритцу, определяются по коэффициентам соответствующего характеристического полинома так же, как C_ν по коэффициентам характеристического ряда. Таким образом, с использованием результатов [1, 2, 5] вычисление оценок типа (3) для достаточно широкого класса упругих систем с распределенными параметрами сводится по существу к определению соответствующих ритцевых приближений.

В качестве примера рассмотрим задачу (см., например, [4])

$$y'' + \lambda (2 + \cos x) y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Определим коэффициенты ее характеристического полинома, соответствующего четырехчленному представлению Ритца $y = \sum\limits_{n=1}^{4} a_n \sin nx$:

$$\alpha_{04} = 9216, \; \alpha_{14} = 26240, \; \alpha_{24} = 16816,$$

а также число $C_{24} = 4{,}457368$. Используя известный подход [5], найдем коэффициенты ряда (4): $C_0 = 1$, $C_1 = \frac{\pi^2}{3}$, $C_2 = \frac{\pi^4}{30} - \frac{\pi^2}{12} + \frac{3}{4}$. Отсюда $C_2 = 4{,}474226$. Вычисляя теперь нижние оценки (3), получаем

$$0{,}489046 < \lambda_1 < 0{,}490035,$$
$$1{,}98947 < \lambda_2 < 2{,}05936,$$
$$3{,}99444 < \lambda_3 < 4{,}67187,$$
$$5{,}9455 < \lambda_4 < 9{,}3529.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Байдак Д. А., Зорій Л. М.— ДАН УРСР, 1972, 6, 548.
2. Зорій Л. М.— ДАН УРСР, 1968, 12, 1072.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. «Наука», М., 1965.
4. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. «Наука», М., 1968.
5. Микеладзе Ш. Е. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений. Гостехтеориздат, М., 1951.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.