Так, для $F(\xi) \equiv 1$ $c = n\pi$, для $F(\xi) = \cos\frac{\pi\xi}{2}$ $c = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, а для $F(\xi) = 1 - \xi^2$ трансцендентное уравнение принимает вид $\operatorname{tg} c = c$ и имеет первый корень $c = 4{,}4934$ [5]. Следует отметить, что в работе [2] для функции $F(\xi) \equiv 1$ первая точка ветвления $c = \pi$ не была обнаружена, поскольку там решение уравнения (1) определялось в классе четных функций, а ответвляющееся в первой точке решение нечетно. Приведенное в работе [2] значение c_0 является второй точкой ветвления.

При рассмотрении двумерного случая ветвления ограничимся четными $F(\xi)$. Собственные функции при этом имеют вид

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{1+\beta\xi^2}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{\xi}{1+\beta\xi^2}. \tag{6}$$

Потребовав, чтобы эти функции удовлетворяли уравнению (2), придем к следующей системе трансцендентных уравнений:

$$\begin{gathered} \int_{-1}^{1} \frac{K(\xi)\cos c\xi}{1+\beta\xi^2}\, d\xi = 0, \\ \int_{-1}^{1} \frac{F(\xi)\,\xi\sin c\xi}{1+\beta\xi^2}\, d\xi = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

из которой можно определить параметр β и точку ветвления c. Например, для $F(\xi) \equiv 1$ второе ветвление имеет место при $c \approx 5{,}347$ и $\beta \approx 2{,}987$. Соответственно, для $F(\xi) = \cos\frac{\pi\xi}{2}$ получается $c \approx 7{,}075$ и $\beta \approx 1{,}760$.

Отметим в заключение, что, зная точки ветвления и соответствующие им собственные функции $\psi_n(\xi)$, можно, следуя работе [1], выписать решение уравнения (1) в виде рядов, хорошо сходящихся в окрестности точек ветвления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. «Наука», М., 1969.
2. Войтович Н. Н.— Радиотехника и электроника, 1972, **17**, 12, 2491.
3. Войтович Н. Н., Савенко П. А.— Радиотехника и электроника, 1973, **18**, 9.
4. Семенов В. В.— Радиотехника и электроника, 1972, **17**, 1, 23.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. «Наука», М., 1968.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОГО И СКРУЧЕННОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ КРУЧЕНИЯ

Б. С. Остапович

Рассматривая задачу устойчивости сжатого и скрученного аксиальным или тангенциальным моментом консольного стержня, Е. Л. Николаи [3] пришел к выводу, что метод Эйлера не применим к данной задаче. Предположив, что масса стержня расположена на свободном конце, и применив метод малых колебаний, Николаи показал, что в данном случае при условии равенства главных изгибных жесткостей и без учета трения всегда имеет место неустойчивость. При этом не учитывалась деформация кручения, предшествующая потере устойчивости (угол закручивания предполагался пренебрежительно малым).

Подобные задачи рассматривались С. П. Вязьменским [2], предложившим модель, в которой угол закручивания принимался конечным. При этом использовался статический метод без обоснования его применимости.

В данной работе задача устойчивости сжатого и скрученного консольного стержня с аналогичным работе [2] учетом деформации кручения исследуется динамическим методом. Показывается, что в ряде случаев здесь всегда имеет место колебательная потеря устойчивости. Рассматриваются также случаи, когда стержень устойчив при определенных докритических значениях параметров.

Рассмотрим упругий консольный стержень с равными главными изгибными жесткостями, нагруженный сжимающей силой P и скручивающим моментом L, вектор которого может в процессе деформации отклоняться от направления недеформированной оси на некоторый малый угол пропорционально наклону касательной к деформированной оси стержня. Угол закручивания считаем конечным и равным $\theta = \frac{L}{GI_k}$, где GI_k — жесткость на кручение, z — продольная координата.

В предположении малости поперечных отклонений задача устойчивости рассматриваемого стержня сводится к многопараметрической задаче на собственные значения для матричного дифференциального уравнения

$$EX^{\mathrm{IV}}(\xi) + AX'''(\xi) + BX''(\xi) + DX(\xi) = 0 \qquad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} X = X' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0; \\ EX'' + KX' = 0, \\ EX''' + AX'' + BX' + CX = 0 \qquad \text{при } \xi = 1. \end{gathered} \qquad (2)$$

Здесь

$X = \begin{pmatrix} x(\xi) \\ y(\xi) \end{pmatrix}$ — искомая матрица-столбец; $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{Ml^3}{EI}\omega^2 & 0 \\ 0 & -\frac{Ml^3}{EI}\omega^2 \end{pmatrix}; \quad \alpha = \frac{Ll}{EI} + 2\theta' l; \quad \beta = \frac{Pl^2}{FI} - (\theta' l)^2;$$

m — масса стержня; M — масса на свободном конце; ω — характеристический показатель, связанный с частотой колебаний системы зависимостью $\omega = i\Omega$; δ_1, δ_2 — коэффициенты пропорциональности наклона вектора скручивающего момента; l — длина стержня. Функции $x(\xi)$ и $y(\xi)$ связаны с поперечными отклонениями стержня $u(\xi, t)$ и $v(\xi, t)$ зависимостями $u(\xi, t) = x(\xi)e^{\omega t}$, $v(\xi, t) = y(\xi)e^{\omega t}$. В дальнейшем пренебрегаем массой m стержня по сравнению с массой M на свободном конце.

Общее решение уравнения (1) строится в виде [1]

$$X = \Phi''' C_1 + \Phi'' C_2 + \Phi' C_3 + \Phi C_4, \qquad (3)$$

где $\Phi(\xi) = \begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_2 & s_4 \end{pmatrix}$ — фундаментальная матрица решений уравнения (1), удовлетворяющая начальным условиям:

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi''(0) = 0, \quad \Phi'''(0) = E. \qquad (4)$$

В этом случае приходим к следующим выражениям:

$$\begin{gathered} s_1 = s_4 = -\frac{1}{\mu^2(\mu+\nu)}\sin\mu\xi - \frac{1}{\nu^2(\mu+\nu)}\sin\nu\xi + \frac{\xi}{\mu\nu}; \\ s_2 = -s_3 = -\frac{1}{\mu^2(\mu+\nu)}\cos\mu\xi + \frac{1}{\nu^2(\mu+\nu)}\cos\nu\xi - \frac{\mu-\nu}{\mu^2\nu^2}; \end{gathered} \qquad (5)$$

$$\mu = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta}; \quad \nu = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta}. \qquad (6)$$

Подставляя теперь решение (3) в граничные условия (2) и приравнивая нулю определитель соответствующей алгебраической системы, получаем характеристический полином рассматриваемой задачи в виде

$$A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 = 0, \qquad \lambda = \omega^2. \tag{7}$$

Заметим, что корни полинома (7) отрицательны, если

$$A_2 > 0, \quad A_1^2 - 4A_0A_2 > 0. \tag{8}$$

Рассмотрим, в частности, случай нагружения стержня аксимальным моментом $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Тогда

$$A_0 = (s_1''' + \alpha s_2'')^2 + (s_2''' - \alpha s_1'')^2 \geqslant 0; \tag{9}$$

$$A_1^2 - 4A_0A_2 = -[r_1(q_{11}q_{14} - q_{12}q_{13}) + r_2(q_{11}q_{13} + q_{12}q_{14}) - (q_{11}^2 + q_{12}^2)]^2 \leqslant 0, \tag{10}$$

где

$$q_{11} = s_1''' + \alpha s_2''; \quad q_{13} = s_1'' + \lambda s_2'; \quad r_1 = -\frac{M}{EI} s_1'; \quad r_2 = -\frac{M}{EI} s_3';$$

$$q_{12} = s_3''' + \alpha s_4''; \quad q_{14} = s_3'' + \alpha s_4'; \quad r_3 = -\frac{M}{EI} s_3.$$

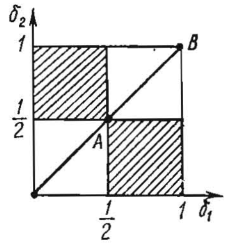

Рис. 1.

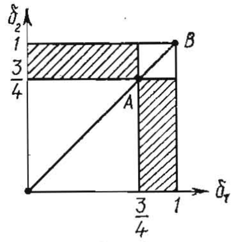

Рис. 2.

Из выражения (10) следует, что стержень неустойчив уже при малых значениях L (при $L=0$ в (10) имеем равенство).

Для других рассмотренных случаев поведения вектора скручивающего момента ($0 < \delta_1$, $\delta_2 \leqslant \leqslant 1$) выполнение условий (8) проверялось путем вычислений. Оказалось, что а) при $GI_k = \infty$ (без учета деформации кручения), кроме известных случаев [3, 4], существует множество точек (δ_1, δ_2), которым соответствует устойчивость прямолинейной формы равновесия при значениях параметров, меньших от критических (заштрихованная область на рис. 1); б) учет деформации кручения существенно меняет это множество; например, при $\frac{EI}{GI_k} = \frac{1}{4}$ стержень устойчив, когда δ_1 и δ_2 принимают значения из заштрихованной области на рис. 2; в) в указанных случаях потеря устойчивости происходит по Эйлеру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балінський А. І., Зорій Л. М.— ДАН УРСР, 1971, 3.
2. Вязьменский С. П.— Инженерный сборник, 1959, 25.
3. Николаи Е. Л. Труды по механике. Гостехиздат, М., 1955.
4. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

О ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНКАХ ВЫСШИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Л. М. Зорий, Р. М. Таций

В работах [1, 2] получены представления характеристических уравнений некоторых многопараметрических задач на собственные значения в виде рядов. Покажем, что использование таких представлений приводит к упро-