г) $b^{(s)}_{k_1\ldots k_s} - {\backprime}a^{(s)}_{k_1\ldots k_s} - m_{s+1} \geqslant 0$, если $a^{(s)}_{k_1\ldots k_s} = -{\backprime}a^{(s)}_{k_1\ldots k_s} < 0$, а $a^{(s+1)}_{k_1\ldots k_s k_{s+1}} < 0$ при m_{s+1} значениях индекса k_{s+1}.

Если через P_s и Q_s обозначить соответственно числитель и знаменатель s-й подходящей дроби ветвящейся цепной дроби K, то s-я подходящая дробь к K совпадает с некоторой фигурной или прореженной (см. [1]) подходящей дробью ветвящейся цепной дроби K_1. Следовательно, при сходимости множества фигурных или прореженных подходящих дробей к ветвящейся цепной дроби K_1 (очевидно, при ее сходимости это имеет место) является сходящейся и последовательность подходящих дробей ветвящейся цепной дроби (3). Теорема доказана.

Заметим, что при $m_{s+1} = N$ растяжение исходной ветвящейся цепной дроби является равномерным.

Теорема 3 дает возможность переносить на ветвящиеся цепные дроби с произвольными по знаку компонентами закономерности и свойства ветвящихся цепных дробей с положительными компонентами, например признаки сходимости, теоремы о ненакоплении относительных погрешностей округления компонент и др. (см. [1—3]).

В качестве примера сформулируем одну из таких теорем.

Теорема 4. *Пусть ветвящаяся цепная дробь общего вида* (1) *с произвольными по знаку компонентами преобразована в равноценную ветвящуюся цепную дробь* (3) *с положительными частными знаменателями и выполнены условия* (4). *Пусть, далее, ветвящаяся цепная дробь* (3) *преобразованием растяжения преобразована в ветвящуюся цепную дробь с положительными компонентами, которая снова заменена равноценной дробью вида* (2) *с положительными компонентами и накопленной относительной погрешностью компонент* δ_n *при числе этажей* n. *Тогда максимальная относительная погрешность дроби* (1) *не превышает* δ_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боднарчук П. И., Скоробогатько В. Я. Ветвящиеся цепные дроби и их приложения. «Наукова думка», К., 1974.
2. Боднарчук П. И., Слоневский Р. В., Марко В. Ф.— В кн.: Вопросы алгебры и теории дифференциальных уравнений, 75. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1973.
3. Слоневский Р. В. Элементы теории ветвящихся цепных дробей и ее приложения к решению дифференциальных уравнений и марковским процессам. Автореф. канд. дис., Одесса, 1972.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию в январе 1974 г.

О НАИЛУЧШЕМ ЧЕБЫШЕВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНИМ НЕЛИНЕЙНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ

Б. Р. Монцибович, Б. А. Попов

Известно, что физические величины могут описываться аналитическими зависимостями, которые далеко не исчерпываются многочленными и рациональными выражениями. Для приближения экспериментальных данных часто также используются выражения вида [1]

$$y = Ax^B; \quad y = Ae^{Bx}; \quad y = Ae^{Bx+Cx^2}; \quad y = Ax^Be^{Cx}; \quad y = Ax^Be^{Cx+Dx^2}.$$

Рассмотрим выражение

$$W_{k,l}(x) = Ax^{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i x^{i-1}} e^{\sum\limits_{i=1}^{l} b_i x^i} \tag{1}$$

при $0 < x < +\infty$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$. Оно является обобщением ранее приведенных выражений. Заметим, что

$$\lim_{x \to +0} W_{k,l}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } a_1 > 0; \\ A & , \text{ если } a_1 = 0, \\ \operatorname{sign}(A) \cdot \infty, & \text{ если } a_1 < 0. \end{cases}$$

Выражение (1) можно записать также в виде

$$W_{k,l}(x) = Ae^{\ln x \sum\limits_{i=1}^{k} a_i x^{i-1} + \sum\limits_{i=1}^{l} b_i x^i} \qquad (0 < x < +\infty,\ k \geqslant 0,\ l \geqslant 0), \quad (2)$$

из которого видно, что при $x \to \infty$ выражение $W_{k,l}(x)$ ведет себя как функция вида

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{b_l x^l} & , \text{ если } l > k-1; \\ Ae^{(b_l + a_k \ln x) x^l}, & \text{ если } l = k-1; \\ Ae^{a_k x^{k-1} \ln x} & , \text{ если } l < k-1. \end{cases}$$

Докажем, что выражением $W_{k,l}(x)$ можно приблизить заданную функцию $y(x) > 0$ с любой требуемой степенью точности (аналог теоремы Вейерштрасса).

Теорема 1. *Для произвольных непрерывных функций* $y(x) > 0$ *и* $w(x) > 0$, *заданных на промежутке* $[\alpha, \beta]$ $(\alpha > 0,\ \beta < +\infty)$ *и таких, что* $\frac{y(x)}{w(x)} \leqslant L < +\infty$ *при* $x \in [\alpha, \beta]$, *и для произвольного* $\varepsilon > 0$ *и фиксированного* $k \geqslant 0$ *найдется* $l \geqslant 0$ *такое, что при всех* $x \in [\alpha, \beta]$

$$\left| \frac{y(x) - W_{k,l}(x)}{w(x)} \right| < \varepsilon,$$

где $W_{k,l}(x)$ *определяется равенством* (1), *причем* $A > 0$.

Доказательство. По известной теореме Вейерштрасса [2], для всякого $\eta > 0$ и любой непрерывной на $[\alpha, \beta]$ функции $\varphi(x)$ найдется многочлен $\sum\limits_{i=1}^{l} b_i x_i$ степени $l \geqslant 0$ такой, что для всех $x \in [\alpha, \beta]$ имеет место неравенство

$$\left| \varphi(x) - \sum_{i=1}^{l} b_i x^i \right| < \eta. \quad (3)$$

Полагая

$$\varphi(x) = \ln y(x) - \ln x \sum_{i=1}^{k} a_i x^{i-1} - \ln A,$$

из неравенства (3) получаем

$$-\eta < \ln y(x) - \ln x \sum_{i=1}^{k} a_i x^{i-1} - \sum_{i=1}^{l} b_i x^i - \ln A < \eta$$

или

$$\ln [y(x) e^{\eta}] > \ln x \sum_{i=1}^{k} a_i x^{i-1} + \sum_{i=1}^{l} b_i x^i + \ln A > \ln [y(x) e^{-\eta}].$$

Отсюда

$$y(x) e^{\eta} > Ax^{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i x^{i-1}} e^{\sum\limits_{i=1}^{l} b_i x^i} > y(x) e^{-\eta}.$$

Произведя простые преобразования, имеем

$$\frac{y(x)(1 - e^{\eta})}{w(x)} < \frac{y(x) - W_{k,l}(x)}{w(x)} < \frac{y(x)(1 - e^{-\eta})}{w(x)}$$

или

$$-(e^{\eta} - 1) \frac{y(x)}{w(x)} < \frac{y(x) - W_{k,l}(x)}{w(x)} < (1 - e^{-\eta}) \frac{y(x)}{w(x)}. \quad (4)$$

Так как
$$1-e^{-\eta}<e^{\eta}-1,$$
то из неравенства (4) следует, что
$$\left|\frac{y(x)-W_{k,l}(x)}{w(x)}\right|<L(e^{\eta}-1). \qquad (5)$$
Выберем в неравенстве (3)
$$\eta=\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{L}\right),$$
тогда неравенство (5) превращается в требуемое. Теорема доказана.

Заметим, что аналогично доказывается и утверждение о том, что для всякого $\varepsilon>0$ и фиксированного $l\geqslant 0$ найдется соответствующее $k\geqslant 0$. При этом относительно промежутка $[\alpha, \beta]$ предполагается, что $\alpha>1$, $\beta<+\infty$, а функцию $\varphi(x)$ полагают равной
$$\varphi(x)=\frac{\ln y(x)}{\ln x}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{l} b_i x^i-\ln A\right)}{\ln x}.$$

Установим теперь возможность существования наилучшего чебышевского приближения вида (1). Приведем здесь без доказательства две леммы.

Лемма 1. *Разность двух выражений вида* (1) *с разными параметрами имеет не больше* $m=k+l$ *нулей на промежутке* $[\alpha, \beta]$, *где* $\beta<+\infty$,
$$\alpha>r=\begin{cases}0 & \text{при } l\geqslant 0,\ 0<k\leqslant l+1;\\ e^{-2} & \text{при } l\geqslant 0,\ k=l+2;\\ 1 & \text{при } l=0,\ k>2;\\ -\infty & \text{при } l\geqslant 0,\ k=0.\end{cases} \qquad (6)$$

Лемма 2. *Частные производные функции* (1) *по параметрам* A, a_i $(i=\overline{1, k})$, b_i $(i=\overline{1, l})$ *образуют пространство Хаара размерности* $m+1\equiv k+l+1$ *при* $x\in[\alpha, \beta]$, *где* $\beta<+\infty$, *а* α *удовлетворяет неравенству* (6).

Из лемм и общих свойств нелинейных чебышевских приближений [4—7] следует теорема.

Теорема 2. *Наилучшее чебышевское приближение с весом* $w(x)>0$ *к функции* $y(x)>0$ *выражением* $W_{k,l}(x)$, *где* $l\geqslant 0$, $0\leqslant k\leqslant l+2$, *или* $l=0$, $k\geqslant 0$ *на множестве точек*
$$X=\{x\in X:\ r<\alpha\leqslant x\leqslant\beta<+\infty\},$$
содержащем не менее $k+l+2$ *точек, где* r *определено формулой* (6), *существует и единственно. Для того чтобы приближение вида* (1) *было наилучшим чебышевским приближением с весом* $w(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы на множестве* X *существовали* $k+l+2$ *точки* $\{z_i\}_{i=1}^{k+l+1}\in X$ $(z_i<z_{i+1},\ i=0,\ k+l)$ *такие, что*
$$\frac{y(z_i)-W_{k,l}(z_i)}{w(z_i)}=(-1)^i\rho, \qquad i=\overline{0,\ k+l+1},$$
где
$$|\rho|=\max_{x\in X}\left|\frac{y(x)-W_{k,l}(x)}{w(x)}\right|.$$

Из общих свойств нелинейных приближений и теоремы 2 следует также возможность использования алгоритмов Ремеза [3] для численного определения параметров наилучшего чебышевского приближения выражением вида (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. «Наука», М., 1967.
2. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. «Наука», М., 1967.

3. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. «Наукова думка», К., 1969.
4. Barrar R. B., Loeb H. L.— Pacific. j. Math., 1970, 32, 4.
5. Barrar R. B., Loeb H. L.— Numer Math., 1970, 15,5.
6. Duncham C. B.— J. Inst. Math. Applic., 1971, 8, 3.
7. Rice J. R. The Approximation of Functions, 2, Reading. Massach., 1969.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР,
Физико-механический институт АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. Полищук

В области $D = \{0 \leqslant t \leqslant T < \infty; \ -\infty < x_p < +\infty, \ p = 1, \ 2, \ \dots, \ m\}$ рассматривается следующая задача:

$$L[u] \equiv \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj} \frac{\partial}{\partial x_p} - b_j \right)^{n_j} u = f(t, x_1, \dots, x_m), \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial^r u}{\partial t^r} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^r u}{\partial t^r} \right|_{t=T} \qquad (r = 0, 1, \dots, n-1), \tag{2}$$

где λ_{pj}, b_j $(j = 1, \dots, q; \ p = 1, \dots, m)$ — действительные числа, $n_1 + \dots + n_q = n$, а функция $f(t, x_1, \dots, x_m)$ в области D непрерывна по t, 2π-периодическая и достаточно гладкая по $x_1, x_2, \dots, x_m$. Решение задачи ищется в классе 2π-периодических по пространственным переменным функций.

Частный случай этой задачи рассмотрен в работе [3].

В дальнейшем будем использовать такие обозначения:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m); \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_m);$$

$$|k| = |k_1| + \cdots + |k_m|; \quad (k, x) = k_1 x_1 + \cdots + k_m x_m;$$

$C_{2\pi}^{(p,q)}(D)$ — класс функций, которые определены в области D, p раз непрерывно дифференцируемы по t, а по x — 2π-периодические и q раз непрерывно дифференцируемы.

Решение задачи ищем в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=-\infty}^{\infty} u_k(t) \exp\{i(k, x)\}. \tag{3}$$

Тогда каждая из функций $u_k(t)$ является, соответственно, решением такой задачи:

$$\prod_{j=1}^{q(k)} \left[\frac{d}{dt} - \left(i \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj} k_p + b_j \right) \right]^{n_j(k)} u_k(t) = f_k(t), \tag{4}$$

$$l_r[u_k] \equiv u_k^{(r)}(0) - u_k^{(r)}(T) = 0 \qquad (r = 0, 1, \dots, n-1), \tag{5}$$

где $f_k(t)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t, x)$; $n_1(k) + \dots + n_q(k) = n$,

$$i \sum_{p=1}^{m} (\lambda_{ps} - \lambda_{p\nu}) k_p + (b_s - b_\nu) \neq 0 \qquad (s, \nu = 1, 2, \dots, q(k); \ s \neq \nu).$$

Для вектора $k \neq 0$ однородное уравнение

$$\prod_{j=1}^{q(k)} \left[\frac{d}{dt} - \left(i \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj} k_p + b_j \right) \right]^{n_j(k)} u_k(t) = 0, \tag{4*}$$