6. Тихонов А. Н.— В кн.: Труды Института теоретической геофизики. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1946.
7. Maeda K.— Geophysics, 1955, 20, 1.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ОБ ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

О. С. Гаврылив

Рассмотрим пористое тело объема W, через которое фильтруется вязкая жидкость плотности ρ^*, динамической вязкости μ^*, гидродинамического давления p^*; усредненную для достаточно малой площадки пористой среды $\Delta\omega$ скорость движения жидкости, объем пор, занимаемых жидкостью, суммарную площадь поперечного сечения пор на $\Delta\omega$ обозначим соответственно V^*, W^*. $\Delta\omega^*$.

Если m — пористость, ΔQ^* — объемный расход вязкой жидкости через площадку $\Delta\omega$, то

$$W = \frac{W^*}{m}, \quad \Delta\omega = \frac{\Delta\omega^*}{m}, \quad V^* = \frac{\Delta Q^*}{\Delta\omega^*}. \tag{1}$$

Согласно предложению Н. Е. Жуковского [2], для описания движения вязкой жидкости в пористой среде удобно использовать уравнения движения идеальной жидкости Эйлера, что влечет за собой необходимость введения предпосылок:

а) рассматриваем движение некоторой идеальной жидкости, сплошным образом заполняющей объем W;

б) массовый расход G_m этой идеальной жидкости через любую площадку $\Delta\omega$ равен массовому расходу G_m^* вязкой жидкости через эту же площадку $\Delta\omega$, т. е.

$$G_m = G_m^*; \tag{2}$$

в) зависимость движения вязкой жидкости в порах от вязкости и конфигурации пор выражаем в уравнениях Эйлера введением к массовым силам так называемой фиктивной силы сопротивления, зависимой от скорости движения жидкости [1—7].

Пусть ρ, $\mu = 0$, p, ΔQ, $V_g = \frac{\Delta Q}{\Delta\omega}$ — соответственно плотность, динамическая вязкость, гидродинамическое давление, объемный расход через площадку $\Delta\omega$, скорость движения идеальной жидкости. Исходя из введенных предпосылок, учитывая формулы (1), (2), имеем

$$\rho = m\rho^*, \quad p = mp^*, \quad \Delta Q = \frac{\Delta Q^*}{m}, \quad V_g = V^*. \tag{3}$$

Удобно пользоваться так называемой скоростью фильтрации

$$V = \frac{\Delta Q^*}{\Delta\omega} = mV_g. \tag{4}$$

Уравнение движения Эйлера для нашей идеальной жидкости запишется так:

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g \operatorname{grad}) \vec{V}_g = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F}, \tag{5}$$

где $\vec{V}_g$ — вектор скорости движения идеальной жидкости, $0xyz$ — декартовая система координат, t — время, $\vec{F}$ — результирующая массовых сил, действующих на идеальную жидкость, отнесенных к единице ее массы. Поскольку такие массовые силы не моделируются, то $\vec{F}$ можно считать отнесенной к единице массы вязкой жидкости.

Согласно предпосылке «в» имеем

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \qquad (6)$$

где $\vec{F}_1$ — результирующая чисто массовых сил, $\vec{F}_2$ — результирующая массовых сил сопротивления движению вязкой жидкости в порах. Считаем ρ, μ, m зависимыми от x, y, z, p, t, $T_п$, $T_ж$, где $T_п$, $T_ж$ — соответственно температура грунта и температура жидкости. Уравнение неразрывности запишется в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{V}_g = 0. \qquad (7)$$

Поскольку $\vec{V}_g = \frac{\vec{V}}{m}$, где $\vec{V}$ — вектор скорости фильтрации, то, учитывая выражения (3), (4), уравнения (5), (7) приводятся к виду (9), (10), где

$$m = m(x, y, z, p, t, T_п, T_ж), \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{V}}{m}\right) + \frac{1}{m}(\vec{V}\operatorname{grad})\left(\frac{\vec{V}}{m}\right) = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial m\rho^*}{\partial t} + \operatorname{div}\rho^*\vec{V} = 0. \qquad (10)$$

Здесь (9) — основные динамические уравнения фильтрации. При $m = \text{const}$ получим уравнения (II.2.4), приведенные в работе [5]. Уравнения (8), (9), (10) вместе с уравнением состояния составляют замкнутую систему для определения неизвестных $\vec{V}$, ρ, p, m. Их следует интегрировать по объему пористого тела W.

Используя основной закон теории фильтрации Дарси

$$\vec{V} = -\frac{c}{\mu^*}\operatorname{grad}(p^* + g\rho^* z), \qquad (11)$$

где c — коэффициент проницаемости пористой среды, пренебрегая инерционными членами уравнений (9), получаем следующую формулу для определения массовой силы сопротивления движению вязкой жидкости в порах:

$$\vec{F}_2 = \frac{p^*}{m\rho^*}\operatorname{grad} m - \frac{\mu^*\vec{V}}{c\rho^*}. \qquad (12)$$

Отсюда при достаточно малой скорости фильтрации и ее изменений имеем упрощенное уравнение движения реальной вязкой жидкости в пористой среде:

$$\vec{V} = \frac{c}{\mu^*}[\rho^*\vec{F}_1 - \operatorname{grad} p^*]. \qquad (13)$$

Уравнения (13) совпадают с уравнениями (II.2.7), приведенными в работе [5].

В случае существенной величины скорости фильтрации или ее изменений, инерционные члены в (9) следует учитывать. Если S_0 — граница пористой среды, то можно перечислить простейшие из граничных условий, которые можно задавать: 1) равенство массовых расходов жидкости $G_m|_{S_0} = G_m^0$; 2) равенство скоростей (при спокойном течении жидкости) $\left.\frac{\vec{V}}{m}\right|_{S_0} = \vec{V}_0^*$; 3) равенство давлений $p^*|_{S_0} = \overset{*}{p_0}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. ГИТТЛ, М., 1953.
2. Жуковский Н. Е. Избранные сочинения. Т. 1. ГИТТЛ, М.— Л., 1948.
3. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ГИТТЛ, М.— Л., 1947.
4. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. «Наука», М., 1969.
5. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, М., 1963.
6. Чугаев Р. Р.— Изв. ВНИИГ, 1965, 78, 214.
7. Щелкачев В. Н.— Изв. вузов. Нефть и газ, 1961, 2.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в январе 1974 г.