

3. Вистелиус А. Б. Математическая геология (состояние, перспективы). «Недра», Л., 1969.
4. Воронин Ю. А.— Геология и геофизика, 1963, 1.
5. Воронин Ю. А., Егансв Э. А.— В кн.: Труды Сиб. НИИ геол., геофиз. и мин. сырья, 79, Новосибирск, 1968.
6. Комаров И. С. Накопление и обработка информации при инженерно-геологических исследованиях. «Недра», М., 1972.
7. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. «Мир», М., 1969.
8. Миллер Р. Л., Кан Д. С. Статистический анализ в геологических науках. «Мир», М., 1965.
9. Назаров И. В.— Геология и геофизика, 1969, 9.
10. Петкевич Г. И.— В кн.: Геофизический сборник АН УССР, 59. «Наукова думка», К., 1974.
11. Продайвода Г. Т.— В кн.: Геофизический сборник АН УССР, 46. «Наукова думка», К., 1972.
12. Пустыльник Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. «Наука», М., 1968.
13. Рац М. В. Неоднородность горных пород и их физических свойств. «Наука», М., 1968.
14. Урсул А. Д. Природа информации. Госполитиздат, М., 1968.
15. Элланский М. М. и др. Математические методы в газонефтяной геологии и геофизике. «Недра», М., 1972.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в октябре 1974 г.

К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ В ПЛОСКОСЕКТОРНОЙ СРЕДЕ

С. И. Восанчук

Задачи распределения электростационарных полей в средах с наклонными границами раздела уже давно привлекают внимание исследователей. Чаще всего рассматривалась одна наклонная плоская граница раздела двух сред.

В статье А. Н. Тихонова [6] дается решение задачи об определении поля точечного источника постоянного тока, расположенного на поверхности земли над наклонной плоскостью раздела двух сред методом интегральных уравнений. Особенностью решения является учет взаимоиндукции наведенных зарядов на плоскостях раздела.

В книге Г. А. Гринберга [4] этому вопросу посвящены две главы — на случай плоской и объемной задач. В плоской задаче рассматривается плоско-секторная среда в линейном внешнем поле и частные случаи: диэлектрический и идеально проводящий клин. В общем случае решается ключевая задача путем определения компонент поля наведенных зарядов с помощью интегральных уравнений. В связи с громоздкостью вычислений до конца доводится решение задачи Макдональда для поля точечного заряда между идеально проводящими плоскостями. Л. М. Альпин [1] дает решение задачи о распределении поля на дневной поверхности от точечного электрода над наклонной проводящей или изолирующей плоскостью методом зеркальных изображений. При произвольных проводимостях и углах, указывает он, построить эквивалентную схему не удается.

И. П. Скальская [5] вычислила поле точечного источника на поверхности земли над наклонной плоскостью измененным методом Г. А. Гринберга. Сущность его заключается в применении интегральных преобразований непосредственно к исходному дифференциальному уравнению и граничным условиям. В случае, когда угол составляет рациональную часть π , потенциал определяется простыми формулами. Такое же решение дает для одной наклонной границы К. Маеда [7]. Он же обосновал метод зеркальных изображений для предельных случаев электропроводности сред.

В настоящей статье показывается возможность распространить метод Дуголла [3] на неограниченное количество наклонных границ и на примере двух сред делаются практические выводы о диагностике наклоннослоистого разреза.

Поле точечного источника в секторной среде. Секторная среда представляет собой набор клиньев с общим ребром по оси Z . Для практических целей удобно рассматривать симметрично секторную среду, в которой клинья одинаковых сопротивлений располагаются симметрично относительно нулевого меридиана, а отсчет углов ведется вправо и влево от него (рис. 1) в пределах от нуля до $\pm \pi$.

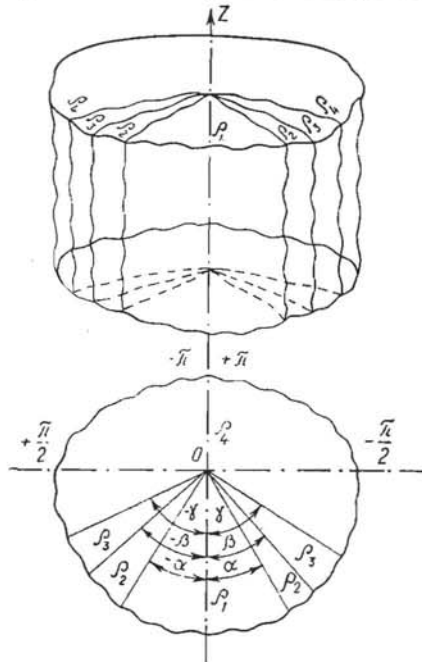


Рис. 1.

Учитывая свойство потенциала уменьшаться с удалением от источника до нуля, для его расчета можно воспользоваться φ -формой функции Грина для всего пространства, которую предложил Дуголл в виде обратного расстояния от источника $A (r_0, \varphi_0, z_0)$ до точки наблюдения $M (r, \varphi, z)$:

Учитывая свойство потенциала уменьшаться с удалением от источника до нуля, для его расчета можно воспользоваться φ -формой функции Грина для всего пространства, которую предложил Дуголл в виде обратного расстояния от источника $A (r_0, \varphi_0, z_0)$ до точки наблюдения $M (r, \varphi, z)$:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \cos(\lambda \Delta z) d\lambda \int_0^{\infty} \operatorname{ch} s(\pi - \Delta \varphi) K_{is}(\lambda r) K_{is}(\lambda r_0) ds, \quad (1)$$

где $\Delta z = z - z_0$, $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0$, $K_{is}(\lambda r)$ — модифицированная функция Бесселя, $i = \sqrt{-1}$, λ, s — переменные интегрирования, меняющиеся от нуля до бесконечности. Исходя из физических представлений, потенциал в среде удельного сопротивления ρ_1 , где находится источник, представляется в виде суммы потенциала в однородной неограниченной среде $U_0 = \frac{\rho_1 I}{4\pi R_0}$ и потенциала, возникшего вследствие искажения поля неоднородностями, границами раздела:

Исходя из физических представлений, потенциал в среде удельного сопротивления ρ_1 , где находится источник, представляется в виде суммы потенциала в однородной неограниченной среде $U_0 = \frac{\rho_1 I}{4\pi R_0}$ и потенциала, возникшего вследствие искажения поля неоднородностями, границами раздела:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{\pi^3} \left\{ \int_0^{\infty} \cos(\lambda \Delta z) d\lambda \int_0^{\infty} [\operatorname{ch} s(\pi - \Delta \varphi) + A(s) \operatorname{ch} s\varphi] K_{is}(\lambda r) K_{is}(\lambda r_0) ds \right\}, \quad (2)$$

где I — сила тока источника, r_0 — расстояние от него до оси Z , $A(s)$ — неизвестная функция от s .

Подынтегральная функция аналитическая в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi$, поэтому клин удельного сопротивления ρ_1 размещается так, чтобы он не содержал координаты $\pm \pi$ и был симметричным относительно плоскости $\varphi = 0$. Другие клинья размещаются попарно симметрично относительно той же плоскости. Последний, как и первый, непарный клин включает меридиан $\pm \pi$, будучи симметричным относительно его.

Для практических целей рассмотрим среду, состоящую из шести секторов с четырьмя удельными сопротивлениями. Потенциалы для каждой из них выпишем, имея в виду аналитичность функций относительно φ :

$$U_2 = \frac{\rho_2 I}{\pi^3} \int_0^{\infty} \cos(\lambda \Delta z) \int_0^{\infty} [B(s) \operatorname{ch} s(\pi - \varphi) + C(s) \operatorname{ch} s\varphi] K_{is}(\lambda r) K_{is}(\lambda r_0) ds, \quad (3)$$

$$U_3 = \frac{\rho_3 I}{\pi^3} \int_0^{\infty} \cos(\lambda \Delta z) \int_0^{\infty} [D(s) \operatorname{ch} s(\pi - \varphi) + E(s) \operatorname{ch} s\varphi] K_{is}(\lambda r) K_{is}(\lambda r_0) ds, \quad (4)$$

$$U_4 = \frac{\rho_4 I}{\pi^3} \int_0^{\infty} \cos(\lambda \Delta z) \int_0^{\infty} [F(s) \operatorname{ch} s(\pi - \varphi) K_{is}(\lambda r) K_{is}(\lambda r_0) ds, \quad (5)$$

где $B(s)$, $C(s)$, $D(s)$, $E(s)$, $F(s)$ — неизвестные функции от s , вид которых зависит от количества секторов и их размеров. Удовлетворяя граничным условиям

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2, \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \quad \text{при } \varphi = \pm \alpha, \\ U_2 &= U_3, \quad \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} \quad \text{при } \varphi = \pm \beta, \\ U_3 &= U_4, \quad \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho_4} \frac{\partial U_4}{\partial \varphi} \quad \text{при } \varphi = \pm \gamma, \end{aligned}$$

получаем уравнения для определения функций $A(s) - F(s)$:

$$\begin{aligned} \rho_1 \operatorname{ch} s(\pi - \alpha) + \rho_2 A(s) \operatorname{ch} s\alpha &= \rho_2 B(s) \operatorname{ch} s(\pi - \alpha) + \rho_2 C(s) \operatorname{ch} s\alpha, \\ \rho_2 B(s) \operatorname{ch} s(\pi - \beta) + \rho_2 C(s) \operatorname{ch} s\beta &= \rho_3 D(s) \operatorname{ch} s(\pi - \beta) + \rho_3 E(s) \operatorname{ch} s\beta, \\ \rho_3 D(s) \operatorname{ch} s(\pi - \gamma) + \rho_3 E(s) \operatorname{ch} s\gamma &= \rho_4 F(s) \operatorname{ch} s(\pi - \gamma), \\ -\operatorname{sh} s(\pi - \alpha) + A(s) \operatorname{sh} s\alpha &= -B(s) \operatorname{sh} s(\pi - \alpha) + C(s) \operatorname{sh} s\alpha, \\ -B(s) \operatorname{sh} s(\pi - \beta) + C(s) \operatorname{sh} s\beta &= -D(s) \operatorname{sh} s(\pi - \beta) + E(s) \operatorname{sh} s\beta, \\ -D(s) \operatorname{sh} s(\pi - \gamma) + E(s) \operatorname{sh} s\gamma &= -F(s) \operatorname{sh} s(\pi - \gamma), \\ \{k_{12} \operatorname{sh} s2(\pi - \alpha) [\operatorname{sh} s\pi - k_{23} \operatorname{sh} s(\pi - 2\beta)] + k_{23} \operatorname{sh} s2(\pi - \beta) [\operatorname{sh} s\pi + \\ + k_{12} \operatorname{sh} s(\pi - 2\alpha)]\} [\operatorname{sh} s\pi - k_{34} \operatorname{sh} s(\pi - 2\gamma)] + k_{34} \operatorname{sh} s2(\pi - \gamma) \times \\ \times \{k_{12} k_{23} \operatorname{sh} s2(\pi - \alpha) \operatorname{sh} s2\beta + [\operatorname{sh} s\pi + k_{12} \operatorname{sh} s(\pi - 2\alpha)] [\operatorname{sh} s\pi + \\ + k_{23} \operatorname{sh} s(\pi - 2\beta)]\} \\ A(s) &= \frac{[\operatorname{sh} s\pi - k_{34} \operatorname{sh} s(\pi - 2\gamma)] \{k_{12} k_{23} \operatorname{sh} s2\alpha \operatorname{sh} s2(\pi - \beta) + [\operatorname{sh} s\pi - \\ - k_{23} \operatorname{sh} s(\pi - 2\beta)] [\operatorname{sh} s\pi - k_{12} \operatorname{sh} s(\pi - 2\alpha)]\} + k_{34} \operatorname{sh} s2(\pi - \gamma) \times \\ \times \{k_{12} \operatorname{sh} s2\alpha [\operatorname{sh} s\pi + k_{23} \operatorname{sh} s(\pi - 2\beta)] + \\ + k_{23} \operatorname{sh} s2\beta [\operatorname{sh} s\pi - k_{12} \operatorname{sh} s(\pi - 2\alpha)]\}}{\Delta}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $k_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$, $k_{23} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 + \rho_2}$, $k_{34} = \frac{\rho_4 - \rho_3}{\rho_4 + \rho_3}$ — коэффициенты отражений;

$$B(s) = (1 - k_{12}) \operatorname{sh} s\pi \frac{[\operatorname{sh} s\pi - k_{23} \operatorname{sh} s(\pi - 2\beta)] [\operatorname{sh} s\pi - k_{34} \operatorname{sh} s(\pi - 2\gamma)] - k_{23} k_{34} \operatorname{sh} s2(\pi - \gamma) \operatorname{sh} s2\beta}{\Delta}; \quad (7)$$

$$C(s) = (1 - k_{12}) \operatorname{sh} s\pi \frac{k_{23} \operatorname{sh} s2(\pi - \beta) [\operatorname{sh} s\pi - k_{34} \operatorname{sh} s(\pi - 2\gamma)] + k_{34} \operatorname{sh} s2(\pi - \gamma) [\operatorname{sh} s\pi + k_{23} \operatorname{sh} s(\pi - 2\beta)]}{\Delta}; \quad (8)$$

$$D(s) = (1 - k_{12}) (1 - k_{23}) \frac{\operatorname{sh} s\pi - k_{34} \operatorname{sh} s(\pi - 2\gamma)}{\Delta} \operatorname{sh}^2 s\pi; \quad (9)$$

$$E(s) = (1 - k_{12}) (1 - k_{23}) \frac{k_{34} \operatorname{sh} s2(\pi - \gamma) \operatorname{sh}^2 s\pi}{\Delta}; \quad (10)$$

$$F(s) = (1 - k_{12}) (1 - k_{23}) (1 - k_{34}) \frac{\operatorname{sh}^3 s\pi}{\Delta}; \quad (11)$$

знаменатель Δ такой же, как и в выражении (6). Аналогично можно получить функциональные коэффициенты для любого количества секторов. Из приведенных выше формул можно получить коэффициенты для меньшего количества секторов. Для этого достаточно соответствующие коэффициенты отражений положить равными нулю. С учетом сказанного для двухсекторной среды

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{\pi^3} \int_0^\infty \cos(\lambda \Delta z) d\lambda \int_0^\infty \left[\operatorname{ch} s(\pi - \varphi) + \frac{k_{12} \operatorname{sh} s2(\pi - \alpha) \operatorname{ch} s\varphi}{\operatorname{sh} s\pi - k_{12} \operatorname{sh} s(\pi - 2\alpha)} \right] K_{is}(\lambda r) K_{is}(\lambda r_0) ds, \quad (12)$$

в среде удельного сопротивления ρ_2 при источнике, расположенном в среде ρ_1 ,

$$U_2 = \frac{\rho_2 I}{\pi^3} \int_0^\infty \cos(\lambda \Delta z) d\lambda \int_0^\infty \frac{(1 - k_{12}) \operatorname{sh} s\pi \operatorname{ch} s(\pi - \varphi)}{\operatorname{sh} s\pi - k_{12} \operatorname{sh} s(\pi - 2\alpha)} K_{is}(\lambda r) K_{is}(\lambda r_0) ds. \quad (13)$$

Непосредственно решить полученные интегралы невозможно, поскольку подынтегральная функция может оказаться мероморфной. Что касается интегралов по s в формулах (12) и (13), то только в функции, заключенной в квадратные скобки в (12), нет полюсов при граничных случаях $k_{12} = \pm 1$ и целократных углах $\frac{\pi}{\alpha} = m$ и $\frac{\pi}{\alpha} = 2m$. В единственном случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$ множитель при $\text{ch } s\varphi$ в (12) $\frac{k_{12} \text{sh } s2(\pi - \alpha)}{\text{sh } s\pi - k_{12} \text{sh } s(\pi - 2\alpha)} = k_{12}$ и исчезает знаменатель. Однако этот случай не представляет интереса, поскольку соответствует одной плоской границе раздела.

При $k_{12} = +1$

$$A(s)_{k_{12}=1} = \frac{\text{sh } s(\pi - \alpha)}{\text{sh } s\alpha} \quad (14)$$

и тогда $A(s)$ приобретает следующие значения:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\pi}{2} \quad A(s) &= 1, \\ \alpha = \frac{\pi}{3} \quad A(s) &= 2 \text{ch } s \frac{\pi}{3}, \\ \alpha = \frac{\pi}{5} \quad A(s) &= 2 \text{ch } s \frac{3}{5} \pi + 2 \text{ch } s \frac{\pi}{5}, \\ \alpha = \frac{\pi}{6} \quad A(s) &= 2 \text{ch } s \frac{2\pi}{3} + 2 \text{ch } s \frac{\pi}{3} + 1, \end{aligned}$$

а общее выражение для потенциала имеет следующий вид:

$$U_1_{\alpha=\frac{\pi}{m}} = \frac{\rho_1 I}{\pi^3} \int_0^\infty \cos(\lambda \Delta z) d\lambda \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \text{ch } s \left(\pi + \varphi - 2\pi \frac{n}{m} \right) K_{is}(\lambda r) K_{is}(\lambda r_0) ds, \quad (15)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots, m$ — индекс суммирования.

При $k_{12} = -1$ и

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\pi}{2} \quad A(s) &= -1, \quad B(s) = 2, \\ \alpha = \frac{\pi}{4} \quad A(s) &= 2 \text{ch } s \frac{\pi}{2} - 1, \\ \alpha = \frac{\pi}{6} \quad A(s) &= 2 \text{ch } s \frac{4\pi}{6} - 2 \text{ch } s \frac{2\pi}{6} + 1, \\ \alpha = \frac{\pi}{8} \quad A(s) &= 2 \text{ch } s \frac{3\pi}{4} - 2 \text{ch } s \frac{\pi}{2} + 2 \text{ch } s \frac{\pi}{4} - 1. \end{aligned}$$

Общая формула для потенциала в клине, окруженном идеально проводящей средой:

$$U_1_{\alpha=\frac{\pi}{2m}} = \frac{\rho_1 I}{\pi^3} \int_0^\infty \cos(\lambda \Delta z) d\lambda \int_0^\infty \sum_{n=1}^{2m} (-1)^n \text{ch } s \left(\pi + \varphi - \frac{n}{m} \pi \right) K_{is}(\lambda r) K_{is}(\lambda r_0) ds. \quad (16)$$

Во всех остальных случаях необходимо преобразовывать интегралы по s в комплексную область. Тогда формулы (12) и (13) приобретают вид

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi^2} i \int_0^\infty \cos(\lambda \Delta z) d\lambda \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cos s(\pi - \varphi) + k_{12} \cos s(\pi + \varphi - 2\alpha)}{\sin s\pi - k_{12} \sin s(\pi - 2\alpha)} K_s(\lambda r) I_s(\lambda r_0) ds, \quad (17)$$

$$U_2 = \frac{\rho_2 I}{2\pi^2} i (1 - k_{12}) \int_0^\infty \cos(\lambda \Delta z) d\lambda \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\cos s(\pi - \varphi)}{\sin s\pi - k_{12} \sin s(\pi - 2\alpha)} K_s(\lambda r) I_s(\lambda r_0) ds. \quad (18)$$

Дробные тригонометрические функции, стоящие под вторыми интегралами, имеют простые полюсы на реальной оси. Интегралы по s в выражениях (17) и (18) берутся контурным интегрированием в правой полуплоскости с полувырезом начала координат и полным охватом реальной полуоси. С учетом неоднородности контура конечный результат будет состоять из двух слагаемых, первое из которых возникает вследствие полувычета в начале координат. Окончательный результат от первого интегрирования:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{\pi} \left\{ \frac{1 + k_{12}}{2[\pi - k_{12}(\pi - 2\alpha)]} \int_0^{\infty} K_0(\lambda r) I_0(\lambda r_0) \cos(\lambda \Delta z) d\lambda + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos s_m(\pi - \varphi) + k_{12} \cos s_m(\pi + \varphi - 2\alpha)}{\pi \cos s_m \pi - k_{12}(\pi - 2\alpha) \cos s_m(\pi - 2\alpha)} \int_0^{\infty} K_{s_m}(\lambda r) I_{s_m}(\lambda r_0) \cos(\lambda \Delta z) d\lambda \right\}. \quad (19)$$

Первый интеграл дается в таблицах работы [2] через полный эллиптический интеграл первого рода, второй — через функции Лежандра второго рода с

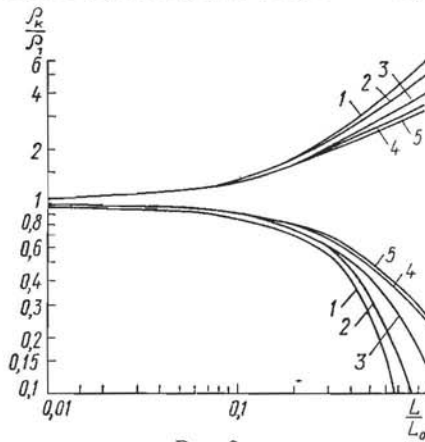


Рис. 2.

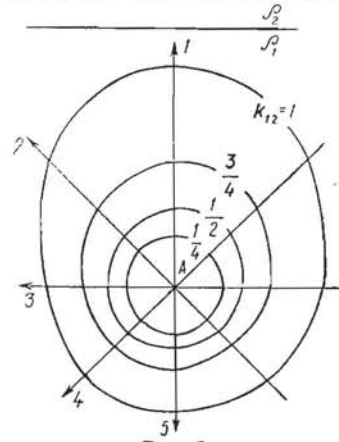


Рис. 3.

полуцелыми индексами; решение их также рассматривается в работах [3] и [7]. Окончательный результат для первой среды:

$$U_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left\{ \frac{(1 + k_{12}) K \left(\sqrt{\frac{2rr_0}{(r + r_0)^2 + (\Delta z)^2}} \right)}{[\pi - k_{12}(\pi - 2\alpha)] \sqrt{(r + r_0)^2 + (\Delta z)^2}} + \frac{1}{\sqrt{rr_0}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos s_m(\pi - \varphi) + k_{12} \cos s_m(\pi + \varphi - 2\alpha)}{\pi \cos s_m \pi - k_{12}(\pi - 2\alpha) \cos s_m(\pi - 2\alpha)} Q_{s_m - \frac{1}{2}} \left(\frac{r_0^2 + r^2 + (\Delta z)^2}{2rr_0} \right) \right\}. \quad (20)$$

Отношение $\frac{U_1}{U_0}$ дает безразмерную характеристику клиновидной области, зависящую в основном от ориентировки профиля исследований по отношению к оси Z и соотношения сопротивлений (контрастности). Эту характеристику можно выразить в виде графиков зависимости относительного кажущегося удельного сопротивления от расстояния между источником и точкой наблюдения, называющихся кривыми зондирования.

Электронзондирование на моноклинали качественно отличается от такового на согласно-залегающих напластованиях. По мере увеличения глубинности исследований кажущееся сопротивление растет при подстилающем слое высокого удельного сопротивления до предельного значения, определяемого формулой

$$\rho_z = \frac{\frac{2\pi}{\theta} \rho_1 \rho_2}{\rho_2 + \left(\frac{2\pi}{\theta} - 1 \right) \rho_1} \quad (21)$$

где $\theta = 2\alpha$.

При идеальной проводимости подстилающего слоя кажущееся сопротивление стремится к нулю. Быстрее всего (при наименьших разносах) предельное значение достигается зондированием, поставленным по восстанию пласта.

На рис. 2 изображены 10 кривых зондирования при погружении плоскости раздела под углом $\frac{\pi}{6}$. Верхние кривые для предельного случая $\rho_2 = \infty$, $k_{12} = 1$, нижние — для $\rho_2 = 0$, $k_{12} = -1$. Кривые 1 сняты по восстанию, 2 — по диагонали (45° к простиранию), 3 — по простиранию, 4 — по нижней диагонали (45° к падению), 5 — по падению. Разнос $L = AM$ нормирован в единицах L_0 — расстояния по восстанию от источника до ребра клина. В отличие от горизонтального параллельно-слоистого разреза на моноклинали наблюдается зависимость кажущихся сопротивлений от азимута проложения профиля зондирования. Если построить полярные диаграммы сопротивлений, то они будут иметь овальную форму в отличие от круговой для согласного залегания и эллиптической для анизотропных сред.

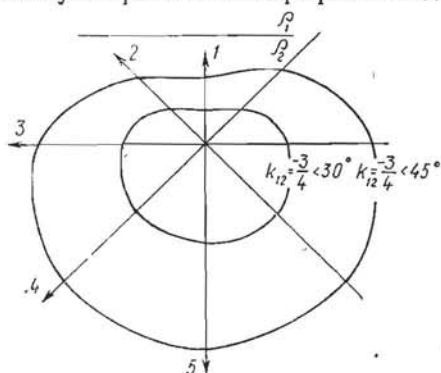


Рис. 4.

На рис. 3 изображен овал сопротивлений для приведенного разноса $\frac{L}{L_0} = 1$ для различных k_{12} . Наибольший (внешний) овал соответствует предельной контрастности $k_{12} = 1$, внутренний — слабой контрастности $\rho_2 = 1,7\rho_1$. Самая короткая полуось овала фиксируется по падению, наибольшая — по восстанию. Их отношение для положительных значений k_{12} находится в пределах 1,17—1,7 и практически не зависит от угла падения.

Для проводящих подстилающих сред, т. е. при отрицательных значениях k_{12} , овал имеет обратную ориентировку. Он направлен в сторону падения длинной полуосью (рис. 4). Отношение длин осей в данном случае зависит от угла падения. При $k_{12} = -\frac{3}{4}$ и угле 30° это отношение равно 2,5, при угле 45° — равно 3. Практически этот избирательный эффект трудно уловить из-за малых абсолютных значений измеряемых потенциалов на проводящих разрезах.

На основании теоретических исследований распределения электрического поля в несогласно-слоистом разрезе можно сделать следующие выводы.

1. Для определения азимутов падения пород следует ставить круговые односторонние зондирования и строить полярные диаграммы сопротивлений. В связи с асимметрией овалов сопротивлений зондирования следует проводить не менее, чем в пяти азимутах.

2. Эквипотенциальные линии вокруг питающего электрода над погружающимися разрезами имеют форму окружностей со смещающимися в сторону падения центрами. Поэтому метод эквипотенциальных линий не может быть эффективным при определении падения слоев.

11

11

ЛИТЕРАТУРА

1. Альпин Л. М. Заметки по теории электрической разведки. ОНТИ, М.—Л., 1935.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. Гостехиздат, М., 1951.
3. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. ИЛ, М., 1953.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948.
5. Сзальская И. П.— ЖТФ, 1948, 18, 10.

6. Тихонов А. Н.— В кн.: Труды Института теоретической геофизики. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1946.
 7. Maeda K.— Geophysics, 1955, 20, 1.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ОБ ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

О. С. Гаврылив

Рассмотрим пористое тело объема W , через которое фильтруется вязкая жидкость плотности ρ^* , динамической вязкости μ^* , гидродинамического давления p^* ; усредненную для достаточно малой площадки пористой среды $\Delta\omega$ скорость движения жидкости, объем пор, занимаемых жидкостью, суммарную площадь поперечного сечения пор на $\Delta\omega$ обозначим соответственно V^* , W^* , $\Delta\omega^*$.

Если m — пористость, ΔQ^* — объемный расход вязкой жидкости через площадку $\Delta\omega$, то

$$W = \frac{W^*}{m}, \quad \Delta\omega = \frac{\Delta\omega^*}{m}, \quad V^* = \frac{\Delta Q^*}{\Delta\omega^*}. \quad (1)$$

Согласно предложению Н. Е. Жуковского [2], для описания движения вязкой жидкости в пористой среде удобно использовать уравнения движения идеальной жидкости Эйлера, что влечет за собой необходимость введения предпосылок:

а) рассматриваем движение некоторой идеальной жидкости, сплошным образом заполняющей объем W ;

б) массовый расход G_m этой идеальной жидкости через любую площадку $\Delta\omega$ равен массовому расходу G_m^* вязкой жидкости через эту же площадку $\Delta\omega$, т. е.

$$G_m = G_m^*; \quad (2)$$

в) зависимость движения вязкой жидкости в порах от вязкости и конфигурации пор выражаем в уравнениях Эйлера введением к массовым силам так называемой фиктивной силы сопротивления, зависящей от скорости движения жидкости [1—7].

Пусть ρ , $\mu = 0$, p , ΔQ , $V_g = \frac{\Delta Q}{\Delta\omega}$ — соответственно плотность, динамическая вязкость, гидродинамическое давление, объемный расход через площадку $\Delta\omega$, скорость движения идеальной жидкости. Исходя из введенных предпосылок, учитывая формулы (1), (2), имеем

$$\rho = m\rho^*, \quad p = mp^*, \quad \Delta Q = \frac{\Delta Q^*}{m}, \quad V_g = V^*. \quad (3)$$

Удобно пользоваться так называемой скоростью фильтрации

$$V = \frac{\Delta Q^*}{\Delta\omega} = mV_g. \quad (4)$$

Уравнение движения Эйлера для нашей идеальной жидкости запишется так:

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g \text{ grad}) \vec{V}_g = -\frac{1}{\rho} \text{ grad } p + \vec{F}, \quad (5)$$

где \vec{V}_g — вектор скорости движения идеальной жидкости, $Oxyz$ — декартова система координат, t — время, \vec{F} — результирующая массовых сил, действующих на идеальную жидкость, отнесенных к единице ее массы. Поскольку такие массовые силы не моделируются, то \vec{F} можно считать отнесенной к единице массы вязкой жидкости.

Согласно предпосылке «в» имеем