

2. Возможность образования рефрагированно-преломленной волны зависит от характера изменения скорости упругих волн в слое и на его подошве, а также по отношению к покрывающим слоям. В прискважинной зоне указанная волна возникает на «несущем кольце».

3. Годограф рефрагированных волн в разрезе с переменным градиентом увеличения скорости упругих волн с глубиной характеризуется плавным возрастанием кажущейся скорости с увеличением разноса. При наличии в разрезе зон инверсии скорости годограф может быть осложнен «выпадением» ветвей, разрывами, петлями или точками возврата.

4. Зависимость истинной скорости от глубины в неоднородном скоростном разрезе определяется посредством графо-аналитической обработки кривой кажущейся скорости. Предложен оперативный способ нахождения глубины максимального проникания и относительного градиента скорости рефрагированных волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Авербух А. Г.— В кн.: Прикладная геофизика, 44. «Недра», М., 1965.
2. Левин А. Н.— В кн.: Прикладная геофизика, 49. «Недра», М., 1967.
3. Назарный С. А.— В кн.: Прикладная геофизика, 45. «Недра», М., 1965.
4. Облогина Т. И., Пийп В. Б.— Вест. Московского ун-та. Сер. геол., 1971, 6.
5. Петкевич Г. И., Лещук В. В.— В кн.: Геофизический сборник АН УССР, 42. «Наукова думка», К., 1971.
6. Файзуллин И. С., Ивакин Б. Н., Цыплаков В. И.— Материалы конференции «Акустические методы исследования нефтяных и газовых скважин». ОНТИ ВНИИЯГ, М., 1972.

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
в декабре 1973 г.

### ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД

**Г. И. Петкевич**

Современный период развития науки характеризуется интенсивным проникновением математических методов в различные области человеческого знания. В связи с необходимостью обработки и анализа массовых и разнородных данных наблюдений широкое проникновение математики началось и в науке геологического профиля. В последние годы отмечается увеличение количества работ в области «математической геологии» [3, 4, 7, 8, 15]. Математизация геологических дисциплин становится важнейшей предпосылкой их дальнейшего прогресса.

Можно выделить три этапа математизации геологических наук [9]. Первый — количественная обработка эмпирических данных, которая осуществляется сегодня с помощью методов математической статистики и широкого использования ЭВМ. Второй этап характеризуется применением математических моделей изучаемых объектов, построенных на основе обобщения теоретических и эмпирических данных. Третий этап связан с построением математической теории геологических объектов и процессов. Можно сказать, что второй и третий этапы пока только намечаются в отдельных отраслях геологической науки. Именно математическое моделирование геологических задач (а не простое применение количественных методов обработки) положено в основу определения «математической геологии» [3].

Природа неоднородности геологических сред и ее формальное описание. Рассмотрение горных пород как однородных сред при изучении их физических свойств не соответствует современному состоянию исследования веще-

ства. В силу особенностей своего образования горные породы неоднородны. Под неоднородностью геологических тел понимается неравномерность распределения в них вещества и разнообразие свойств составляющих их элементов [10]. Сложный характер наблюдаемой неоднородности пород связан с неоднородностью исходного материала и его последующими преобразованиями. В связи с этим осадочные породы неоднородны по своему составу, структуре, текстуре, степени уплотнения и нарушенности, свойствам поровых заполнителей, напряженному состоянию. Формы проявления неоднородности осадочных пород многообразны (полиминеральность, слоистость, сланцеватость, степень консолидации и нарушенности, многофазность и пр. [10]).

Степень неоднородности среды увеличивается при наличии в ней неоднородностей различных типов, большего разнообразия элементов каждого из типов, неравномерности их распределения, большего различия по свойствам элементов неоднородности и вмещающей среды, присутствия неоднородностей разных уровней и т. п. Таким образом, поскольку любой геологический объект возникает как результат взаимодействия множества факторов и наложенных друг на друга различных явлений, можно говорить о его «вероятностной» природе [15].

Непосредственное изучение геологической неоднородности вызывает значительные трудности, поэтому более эффективным является применение различных физических методов исследований. Перед геофизической разведкой на современном этапе ставятся разнообразные задачи по выявлению различного рода неоднородностей в сложнопостроенных средах. Проявлением (индикатором) неоднородности геологических сред является изменчивость их физических свойств. Наблюдаемая изменчивость отражает, с одной стороны, свойства самого объекта, а с другой — детальность наших представлений о нем. Наблюдаемая изменчивость физических параметров обычно представляет собой суперпозицию двух составляющих — закономерной и случайной. Поэтому в зависимости от уровня рассмотрения и методики изучения истинная изменчивость может проявляться по-разному. Степень изменчивости параметра выражает меру неоднородности пород.

Для эффективного изучения геологической неоднородности с помощью физических методов необходимо вначале найти соответствие между ее геологическими признаками и различными физическими параметрами. Эта задача может решаться путем теоретического и экспериментального моделирования, при котором задаются определенные модели неоднородных геологических сред или конкретные геологические объекты (образцы пород, геологические структуры) с известным составом и строением и определяются их физические характеристики. Указанные типы неоднородности в той или иной форме должны найти свое отображение в полях физических параметров (уровне их значений, характере, степени и направлении изменчивости, их различных соотношениях и т. п.). Однако построение таких моделей возможно только при выполнении определенных операций, необходимых для приведения в соответствие описательных геологических и количественных математических понятий. Иными словами, необходимо произвести предварительную формализацию геологических признаков [4]. Для формального описания геологических тел весьма продуктивным оказывается системный подход. «Всякая система представляет собой некоторое количество разнородных либо одинаковых элементов, объединенных связями, так что обеспечивается целостная функция» [1, с. 4]. В связи с этим сложнопостроенные геологические тела могут рассматриваться как «геологические системы». В свою очередь геологическое тело можно подразделить на ряд элементов.

Формальное описание пористой среды начинается с создания ее геометрического облика с помощью таких характеристик, как величина пористости, тип укладки, гранулометрические показатели, коэффициенты неоднородности формы пор и их размеров и др. Геометризацию геологических элементов можно рассматривать как начальный этап формализации. На основе этих данных строится структурно-геологическая модель агрегата.

В свою очередь отдельным элементам среды можно приписать некоторые физические параметры, что позволяет в итоге построить структурно-механическую модель среды. Последняя является уже «вполне формальной моделью, которая может быть описана средствами математики» [6, с. 212]. Этот переход от модели понятийной (обычно качественной) к модели математической (количественной) и определяет сущность математического мышления в геологии. Но далеко не всем геологическим признакам сред можно найти соответствующие формальные аналоги.

Одним из типов математических моделей является детерминированная модель. Она базируется на существовании функциональных связей между параметрами модели и ограниченным числом влияющих факторов. При этом обычно находят отражение только основные количественные связи, а подавляющее большинство качественных теряется. Поэтому при описании сложных геологических объектов такие модели оказываются неудовлетворительными.

**Сущность вероятностно-статистического подхода к анализу физических параметров неоднородных сред.** Геологические данные представляют собой наблюдения качественных признаков или количественного измерения свойств природных объектов. Применение физических методов исследований позволяет выражать свойства пород (в том числе и качественные) в числовой форме в виде различных количественных или ранжированных показателей. Таким образом, при решении геолого-геофизических задач очень часто рассматриваются множества явлений или признаков тех или иных геологических объектов.

Результаты измерения какого-либо физического параметра определенного геологического объекта вследствие неоднородности горных пород, множества влияющих факторов и погрешностей измерений обычно выражаются некоторым распределением величин, значения которых заведомо неизвестны, но подчиняются определенным математическим законам. Следовательно, можно допустить, что наступление определенного геологического события (значения параметра) носит вероятностный характер, а сами значения параметров являются случайными величинами. В сущности при любом геологическом исследовании выводы, полученные по ограниченному числу наблюдений или измерений — выборке, распространяются на значительно большую группу объектов — генеральную совокупность [7]. На этом основано применение статистических методов исследований для анализа геологических данных, в частности результатов измерений физических свойств пород.

Использование теории вероятности в геологии требует некоторых оговорок. Прежде всего, геологические явления подчиняются определенным закономерностям, поэтому случайность геологического события означает лишь тот факт, что его наступление нельзя заранее предсказать вследствие множества влияющих факторов. Однако не все геологические явления подчиняются такой схеме, поэтому необходимо предварительно выяснять природу конкретного геологического явления.

Для применения аппарата математической статистики необходимо построить соответствующий аналог геологической модели — статистическую (стохастическую) модель [7]. Большинство статистических моделей базируется на предположении нормального распределения изучаемой случайной величины. В условиях малых выборок выбор модели распределения далеко не однозначен. В некоторых случаях наблюдаются многовершинные распределения, объясняемые смешением отдельных, более простых. Возникновение того или иного конкретного распределения геологических признаков обусловлено причинами, связанными с определенной геологической обстановкой.

Исходя из имеющихся в литературе данных [6—8], выделим следующие типы статистических задач, которые наиболее часто встречаются в геологической практике: 1) общий статистический анализ распределений измеряе-

мых признаков; 2) определение связи (статистическая корреляция) и предсказание по одним признакам значений других; 3) оценка факторов, определяющих значения искоемых параметров в статистических связях; 4) выявление различий между признаками, характеризующими геологические объекты, и распознавание последних.

Общий статистический анализ заключается в нахождении основных статистик распределений изучаемых признаков (среднего, дисперсии, коэффициента вариации, асимметрии, эксцесса и др.). Существенная особенность неоднородной геологической среды заключается в том, что ее статистики могут изменяться в зависимости от объема проб. В связи с этим выделяют масштабный эффект первого рода, выражающийся в изменении средней, масштабный эффект второго рода — в изменении дисперсии, масштабный эффект третьего рода — в изменении асимметрии распределения. При этом допускается, что данное свойство является аддитивной функцией множества элементов неоднородности и каждый из них равноправен. Показано, что для основных свойств горных пород могут иметь место две схемы действия неоднородности: а) схема А — Н — Р (аддитивности — независимости — равноправности), для которой характерен нормальный закон распределения и масштабный эффект второго рода (коэффициент вариации  $\omega \approx 1/\sqrt{n}$ , где  $n$  — число «элементарных» ячеек), масштабные эффекты первого и третьего рода отсутствуют (среднее и асимметрия не зависят от размеров проб); б) схема А — В — Р (аддитивности — взаимозависимости — равноправности), для которой характерно логарифмически нормальное распределение и проявление масштабных эффектов второго и третьего рода,  $\omega$  меняется медленнее, чем обратно пропорционально  $\sqrt{n}$ , а асимметрия уменьшается с ростом величины пробы [13].

В геологической практике часто приходится вести наблюдения за несколькими случайными величинами, которые могут в той или иной степени зависеть друг от друга. В отличие от функциональной зависимости между случайными величинами существует связь особого рода, при которой значению одной переменной может соответствовать некоторый диапазон значений другой. Такая связь известна как корреляционная или стохастическая.

Первая задача заключается в установлении числового критерия, характеризующего степень близости корреляционной зависимости к функциональной или тесноту связи [12]. Оценка взаимосвязи случайных величин по коэффициенту корреляции или корреляционному отношению производится с помощью корреляционного анализа. Второй задачей является установление формы корреляционной связи случайных величин, которая производится с помощью регрессионного анализа.

В геологии часто встречается ситуация, когда вариации признака вызываются несколькими факторами, но их роль (значимость) неясна. В этом случае задача заключается в том, чтобы оценить изменчивость, вызываемую различными источниками, т. е. разложить общую дисперсию на составные части [12]. Изучение переменных факторов по их дисперсиям осуществляется с помощью дисперсионного анализа. Дальнейшим развитием методов многомерного анализа является факторный анализ, позволяющий находить количественные оценки влияющих факторов [3].

**Информативность параметров и задачи диагностики пород.** Физические характеристики горных пород несут сведения о составе, строении, физическом состоянии и истории формирования реальных сред. В этой связи геологическую среду, описываемую полями параметров, можно рассматривать как информационную систему, несущую полезную информацию. В общем случае тот объем информации, который может отдать в конкретных условиях какой-либо физический параметр, назовем информативностью. Исследование информативности физических параметров целесообразно производить с позиций неоднородности геологических сред. Понятие информации тесно связано с такими категориями, как разнообразие, неоднородность, организация.

[9]. По В. М. Глушкову [9, с. 74] «всякая неоднородность несет в себе какую-то информацию». Ограничение разнообразия означает уменьшение количества информации. Однако информативна лишь упорядоченная, организованная неоднородность.

Оценку информативности параметров можно произвести с помощью многомерного регрессивного анализа. С этой целью устанавливается связь искомого параметра с различными признаками (факторами) в виде полиномов вида  $y = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \alpha_{i+1}$ .

Вводя различные комбинации признаков по изменению коэффициентов множественной корреляции  $R$  и ошибок прогнозирования  $S$ , оцениваем информативность прогнозируемого параметра относительно различных признаков объекта [15]. Нормируя признаки по стандартам, можно определить оценки долевого участия отдельных показателей в множественной связи [11]. Например, если  $y = \sum_{i=1}^k \beta_i \frac{x_i}{\sigma_i} + \alpha_{i+1}$

( $\sigma_i$  — стандарт признака  $x_i$ ), то коэффициенты  $\beta_i = \alpha_i \sigma_i$  будут характеризовать долю участия фактора  $x_i$  в данной связи. В этом случае под информативностью будем понимать меру «влиятельности» одного из признаков, входящих в статистическую связь, на другой, прогнозируемый.

Большинство геолого-геофизических задач относится либо к задачам классификации объектов (типов отложений, продуктивных пластов и др.), либо к задачам количественной оценки характеристик объекта по косвенным данным [15]. Для решения задачи классификации обычно формируются совокупности отличительных признаков, описывающие некие «образы» изучаемых объектов. Методика распознавания образов заключается в принятии решения о принадлежности объекта к тому или иному классу [2]. Если число распознаваемых образов будет  $M$ , а число признаков каждого образа  $N$ , тогда каждому эталонному образу будет соответствовать некоторый  $n$ -мерный вектор, а каждому образу  $M$  — некоторый объем в пространстве параметров. Реализация процесса распознавания заключается в разбишке  $n$ -мерного пространства на области, соответствующие каждому из распознаваемых объектов. Эта задача может решаться с помощью дискриминантных функций [7]; используются и другие критерии — расстояние Махаланобиса и коэффициент сходства или различия [5]. Узнавание основано на сравнении моделей реальных объектов, воспроизведенных по их измеренным параметрам, с моделью «эталона», полученного в процессе обучения.

В задачах распознавания важнейшим является выбор комплекса наиболее информативных параметров. Интересно отметить, что при методике распознавания можно установить, к какому параметру чаще обращается машина для решения конкретной задачи, т. е. определить значимость каждого из них и их относительную информативность. Использование программ распознавания в геологии поможет решить в итоге общую задачу петрофизической классификации горных пород.

Оценка характеристик объектов по косвенным данным о параметрах производится обычно по множественным регрессионным уравнениям. Достоверность предсказания оценивается по величине коэффициента множественной корреляции и ошибке прогнозирования [15].

В заключение отметим, что математизация задач по исследованию физической неоднородности геологических сред может идти как в рамках сложившейся системы понятий на основе использования вероятностно-статистических методов обработки и анализа, так и путем введения формальных категорий и построения более совершенных моделей, отвечающих природе реальных геологических объектов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов Н. М. Моделирование сложных систем. «Наукова думка», К., 1968.
2. Васильев В. И. Распознающие системы. «Наукова думка», К., 1969.

3. Вистелиус А. Б. Математическая геология (состояние, перспективы). «Недра», Л., 1969.
4. Воронин Ю. А.— Геология и геофизика, 1963, 1.
5. Воронин Ю. А., Егансв Э. А.— В кн.: Труды Сиб. НИИ геол., геофиз. и мин. сырья, 79, Новосибирск, 1968.
6. Комаров И. С. Накопление и обработка информации при инженерно-геологических исследованиях. «Недра», М., 1972.
7. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. «Мир», М., 1969.
8. Миллер Р. Л., Кан Д. С. Статистический анализ в геологических науках. «Мир», М., 1965.
9. Назаров И. В.— Геология и геофизика, 1969, 9.
10. Петкевич Г. И.— В кн.: Геофизический сборник АН УССР, 59. «Наукова думка», К., 1974.
11. Продайвода Г. Т.— В кн.: Геофизический сборник АН УССР, 46. «Наукова думка», К., 1972.
12. Пустыльник Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. «Наука», М., 1968.
13. Рац М. В. Неоднородность горных пород и их физических свойств. «Наука», М., 1968.
14. Урсул А. Д. Природа информации. Госполитиздат, М., 1968.
15. Элланский М. М. и др. Математические методы в газонефтяной геологии и геофизике. «Недра», М., 1972.

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
в октябре 1974 г.

## К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ В ПЛОСКОСЕКТОРНОЙ СРЕДЕ

**С. И. Восанчук**

Задачи распределения электростационарных полей в средах с наклонными границами раздела уже давно привлекают внимание исследователей. Чаще всего рассматривалась одна наклонная плоская граница раздела двух сред.

В статье А. Н. Тихонова [6] дается решение задачи об определении поля точечного источника постоянного тока, расположенного на поверхности земли над наклонной плоскостью раздела двух сред методом интегральных уравнений. Особенностью решения является учет взаимоиндукции наведенных зарядов на плоскостях раздела.

В книге Г. А. Гринберга [4] этому вопросу посвящены две главы — на случай плоской и объемной задач. В плоской задаче рассматривается плоско-секторная среда в линейном внешнем поле и частные случаи: диэлектрический и идеально проводящий клин. В общем случае решается ключевая задача путем определения компонент поля наведенных зарядов с помощью интегральных уравнений. В связи с громоздкостью вычислений до конца доводится решение задачи Макдональда для поля точечного заряда между идеально проводящими плоскостями. Л. М. Альпин [1] дает решение задачи о распределении поля на дневной поверхности от точечного электрода над наклонной проводящей или изолирующей плоскостью методом зеркальных изображений. При произвольных проводимостях и углах, указывает он, построить эквивалентную схему не удается.

И. П. Скальская [5] вычислила поле точечного источника на поверхности земли над наклонной плоскостью измененным методом Г. А. Гринберга. Сущность его заключается в применении интегральных преобразований непосредственно к исходному дифференциальному уравнению и граничным условиям. В случае, когда угол составляет рациональную часть  $\pi$ , потенциал определяется простыми формулами. Такое же решение дает для одной наклонной границы К. Маеда [7]. Он же обосновал метод зеркальных изображений для предельных случаев электропроводности сред.