

## ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГОДОГРАФОВ РЕФРАГИРОВАННЫХ ВОЛН В СЛОИСТО-ГРАДИЕНТНОЙ СРЕДЕ

**В. В. Лещук**

В прискважинной зоне породы происходит возрастание скорости упругих волн от стенки скважины до внутренней границы зоны («несущего кольца»), за пределами которой скорость асимптотически падает к истинному значению в неизменной породе [5]. В указанной зоне можно выделить несколько подзон с различными градиентами изменения скорости. Модель околоскважинной среды в виде слоисто-градиентного бокового разреза должна оказывать существенное влияние на характер волнового поля при акустическом каротаже, особенно на кинематику рефрагированных волн. Рассмотрим условия образования и свойства годографов рефрагированных волн, а также обратную кинематическую задачу интерпретации для неоднородного скоростного разреза. Полученные выводы в равной степени применимы к вертикально-неоднородным геологическим разрезам, изучаемым в сейсморазведке и сейсмологии.

**Рефрагированные волны для некоторых моделей среды.** Двухслойный разрез с переменной скоростью упругих волн в покрывающем и постоянной скоростью в подстилающем слоях. Кинематика рефрагированных волн, распространяющихся в слое с возрастающей с глубиной скоростью, освещена в работах [1, 4, 5].

В уравнение для годографа рефрагированной волны входит выражение для годографа головной волны (преломленной на кровле слоя в предположении отсутствия в нем градиента скорости) и поправка времени  $\Delta t$  за влияние рефракции:

$$t_{рф} = \frac{l_{рф}}{v(h_0)} - \Delta t, \quad (1)$$

где  $l_{рф}$  — эффективное расстояние между излучателем и приемником акустического зонда (разнос зонда),  $v(h_0)$  — скорость упругих волн на кровле слоя. Кажущаяся скорость по годографу монотонно возрастает с увеличением разнosa и ее значение в каждой точке регистрации равно истинной скорости на глубине максимального проникания рефрагированной волны [1]. Начиная с определенного разнosa (рефрагированная волна достигает подошвы слоя), возникает рефрагированно-преломленная волна, годограф которой выражается уравнением [2]

$$t_{рф-п} = t_0 + \frac{l_{рф}}{v_n} = \frac{l_{рф}}{v_n} + 2 \frac{\cos i(h_0)}{v(h_0)} \Delta h - \frac{v'(r)|_{r=h_0}}{v^2(h_0) \cos^2 i(h_0)} \Delta h^2 + \\ + \frac{v'(r)|_{r=h_0} [3 \cos^2 i(h_0) - 1] - v(h_0) v''(r)|_{r=h_0} \cos^2 i(h_0)}{3v^3(h_0) \cos^3 i(h_0)} \Delta h^3 - \dots, \quad (2)$$

где  $h_0$  — глубина залегания кровли слоя,  $\Delta h$  — мощность слоя,  $i(h_0)$  — начальный угол луча с вертикалью,  $v(r)$  — зависимость скорости упругих волн от глубины.

Начальное время рефрагированно-преломленной волны  $t_0$  меньше начального времени преломленной волны  $t_0^n$  (в предположении отсутствия градиента скорости) на величину поправки за счет рефракции:

$$t_0 = t_0^n - \Delta t_0. \quad (3)$$

Угол луча определяется из соотношения

$$p = \frac{\sin i(h_0)}{v(h_0)} = \frac{\sin i(r)}{v(r)} = \frac{\sin i}{v_n}, \quad (4)$$

где  $p = \text{const}$  — параметр луча,  $i(r)$  — текущий угол луча,  $i = \arcsin \frac{v(h)}{v_n}$  — критический угол падения луча на границу,  $v_n$  — скорость упругих волн в подстилающем слое.

При непрерывном переходе скорости через подошву слоя (граница II рода,  $v'(r)$  терпит разрыв) имеем  $i = \pi/2$  и годограф рефрагированной волны  $\tilde{P}_1$  плавно переходит в прямолинейный годограф рефрагированно-преломленной волны  $\tilde{P}_1 P_2 \tilde{P}_1$  (II), кажущаяся скорость по которому равна скорости на подошве слоя (рис. 1). При скачке скорости на подошве  $v_n > v(h)$  (граница I рода,  $v(r)$  терпит разрыв)  $i < \pi/2$  и на годографе наблюдается точка перегиба, соответствующая вступлению рефрагированно-преломленной волны  $\tilde{P}_1 P_2 \tilde{P}_1$  (I).

В случае уменьшения скорости упругих волн с глубиной в покрывающем слое рефрагированная волна не возникает в соответствии с

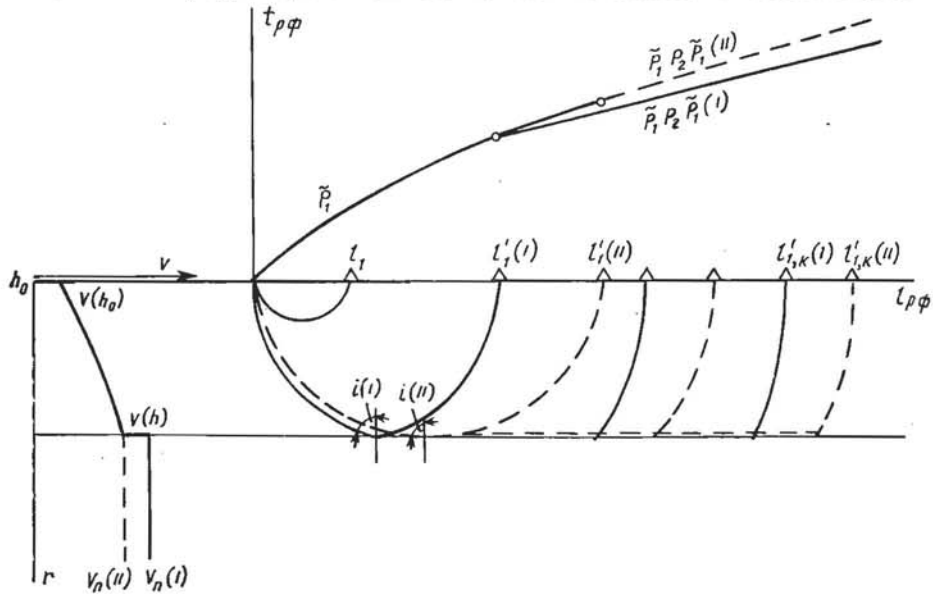


Рис. 1.

принципами Снеллиуса и Ферма. Однако если на последующей границе скорость упругих волн изменяется скачком, то граница становится скоростным «экраном», втягивающим лучи волны внутрь среды. Текущий угол луча уменьшается с глубиной, и луч распространяется по вогнутой кривой (см. рис. 3). На кровле нижележащего слоя луч преломляется согласно условию

$$n = \frac{\sin i(h)}{\sin \beta} = \frac{v(h)}{v_n}, \quad (5)$$

где  $n$ ,  $\beta$  — соответственно коэффициент и угол преломления луча,  $i(h)$  — угол падения луча на границу.

Из соотношений (4) и (5) следует, что при критическом угле падения луча на границу I рода происходит полное внутреннее отражение волны ( $\beta = \pi/2$ ) и образуется рефрагированно-преломленная волна, годограф которой описывается уравнением (2) с учетом инверсии скоростей на границах слоя. На границе II рода ( $n = 1$ ) луч полностью преломляется в подстилающий слой, вследствие чего рефрагированно-преломленная волна не возникает. Как видим, возможность образования рефрагированно-преломленной волны зависит от характера изменения скорости упругих волн в покрывающем слое и на его подошве. Если на подошве слоя с возрастающей с глубиной скоростью достаточно является условие  $v_n = v(h)$ , то для слоя со спадающей скоростью необходим положительный скачок скорости на подошве, значение которой должно превышать скорость волн на вышележащих границах.

Отсюда вытекает важный вывод применительно к околоскважинной среде. Внутреннюю границу («несущее кольцо») зоны можно рассматривать как скоростной «экран», который благоприятствует образованию рефрагированно-преломленной волны, однако препятствует дальнейшему преломлению упругих волн в среду. Можно полагать, что «захват» неизменной породы указанной волной происходит вследствие ее «динамического» проникания [6].

Многослойный разрез с переменным градиентом возрастания скорости упругих волн с глубиной (рис. 2). Исходя из зависимостей (1) — (3) уравнение годографа

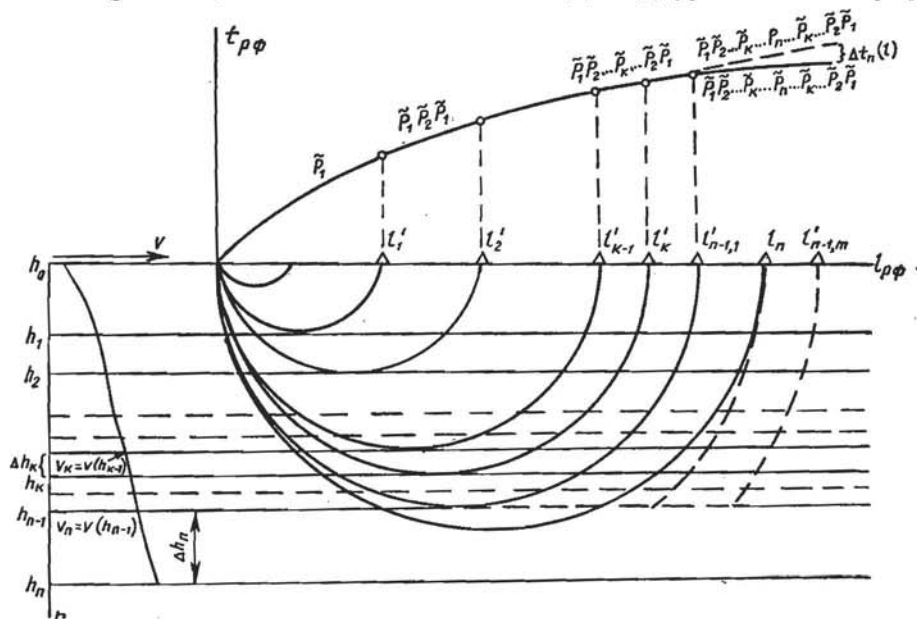


Рис. 2.

рефрагированной волны, проникающей во второй и последующие слои, можно записать в виде

$$t_2 = t'_1 - \Delta t_2 = t_{0,1} + \frac{l_{p\phi}}{v(h_1)} - \Delta t_2,$$

$$t_3 = t_{0,1} + t_{0,2} + \frac{l_{p\phi}}{v(h_2)} - \Delta t_3$$

и, наконец,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n-1} (t'_{0k} - \Delta t_{0k}) + \frac{l}{v_n} - \Delta t_n, \quad (6)$$

где  $v_n$  — скорость упругих волн на кровле последнего слоя. Временные поправки за рефракцию волны  $\Delta t_{0,k}$ ,  $\Delta t_n$ , соответственно для промежуточного и последнего слоев, выражаются зависимостями

$$\Delta t_{0,k} = \frac{v'(r)_{k/r=h_{k-1}}}{v_k^2 \cos^2 i_k} \Delta h_k^2 - \frac{v'(r)_{k/r=h_{k-1}} (3 \cos^2 i_k - 1)}{3 \cos^3 i_k v_k^3} \Delta h_k^3 -$$

$$- \frac{v_k v''(r)_{k/r=h_{k-1}} \cos^2 i_k}{3 \cos^3 i_k v_k^3} \Delta h_k^3 + \dots, \quad (7)$$

$$\Delta t_n = \frac{v''(r)_{n/r=h_{n-1}}}{24 v_n^3} (l - \Delta l_{(n-1)})^3 -$$

$$- \frac{9 v'^4(r)_{n/r=h_{n-1}} - 8 v_n v''^3(r)_{n/r=h_{n-1}} v''(r)_{n/r=h_{n-1}}}{1920 v_n^5} (l - \Delta l_{(n-1)})^5 + \dots,$$

где  $\Delta l_{(n-1)}$  — сейсмический снос луча в вышележащих слоях по отношению к кровле последнего слоя,  $\Delta h_k$  — мощность промежуточного слоя,  $i_k \approx \arcsin \frac{v_k}{v_n}$  — начальный угол луча в промежуточном слое.

Годограф рефрагированных волн является непрерывной кривой, каждая ветвь которой соответствует определенному слою в разрезе. Кажущаяся скорость по годографу при переходе к последующей ветви изменяется плавно (граница II рода) или заметно возрастает (граница I рода). По характеру изменения кажущейся скорости трудно разделить годограф рефрагированной волны на отдельные ветви.

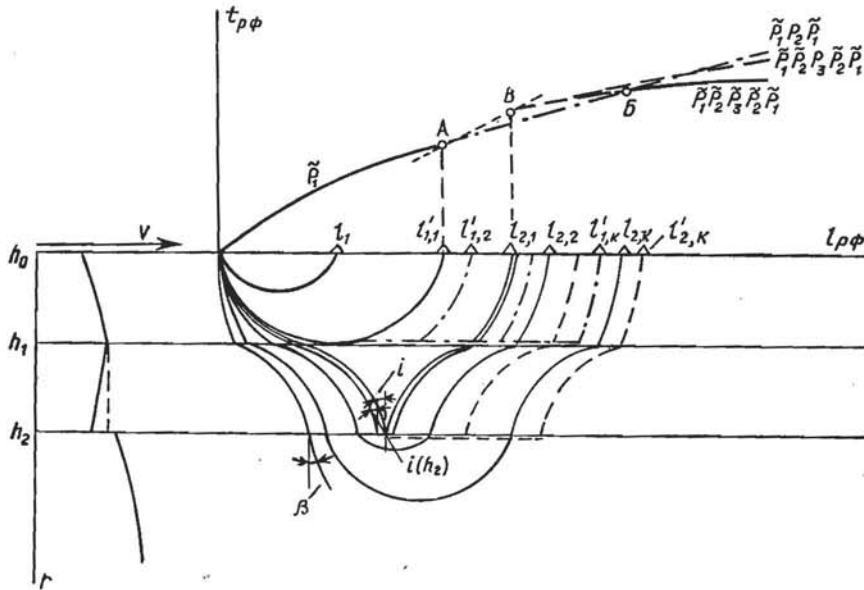


Рис. 3.

Разрез чередующихся слоев с возрастающей и спадающей скоростью упругих волн с глубиной (рис. 3). В комбинированном разрезе возникают рефрагированные волны различных типов, годографы которых можно описать с помощью уравнений (1), (2) и (6). Годограф рефрагированной волны в первом слое  $\tilde{P}_1$  плавно переходит в годограф рефрагированно-преломленной волны  $\tilde{P}_1\tilde{P}_2\tilde{P}_1$  от кровли промежуточного слоя, если она является сейсмически резкой границей и в разрезе отсутствует скоростной «экран». Годограф волны  $\tilde{P}_1\tilde{P}_2\tilde{P}_1$  в случае выхода ее в первые вступления скрывает на некотором расстоянии (АВ) начальную ветвь годографа рефрагированной волны  $\tilde{P}_1\tilde{P}_2\tilde{P}_3\tilde{P}_2\tilde{P}_1$  в третьем слое (если  $v_3 = f(r)$ ), или рефрагированно-преломленной волны  $\tilde{P}_1\tilde{P}_2\tilde{P}_3\tilde{P}_2\tilde{P}_1$  от кровли этого слоя (если  $v_3 = \text{const}$ ). Отметим, что наличие в разрезе слоя со спадающей с глубиной скоростью может привести к разрыву годографа или к прослеживанию мнимой ветви его (АВ). Несмотря на низкое значение кажущейся скорости, указанная ветвь не соответствует промежуточному слою, хотя по ее угловому коэффициенту можно определить (исходя из теоремы Лагранжа о конечном приращении) среднюю скорость в слое.

Следовательно, соотношение годографов рефрагированных волн в комбинированном разрезе может обусловить «выпадение» отдельных ветвей, разрыв годографа, а также осложнение его мнимыми ветвями, точками возврата или петлями.

Обратная кинематическая задача интерпретации рефрагированных волн в неоднородном скоростном разрезе. Задача определения истинной скорости от глубины решается графо-аналитическим способом, который заключается в анализе графика кажущейся скорости, полученного дифференцированием наблюдаемого годографа рефрагированных волн по известной формуле [5] или графическим путем. График  $v(l)$  разбивают на участки с постоянной разностью скоростей, которым отвечают в разрезе условные слои с постоянными градиентами скорости (рис. 4), вследствие чего сложная зависимость скорости от глубины  $v(r)$  аппроксимируется кусочно-линейными зависимостями. Кажущаяся скорость в конечной точке каждого участка равна скорости упругих волн на подошве соответствующего слоя. Следовательно,

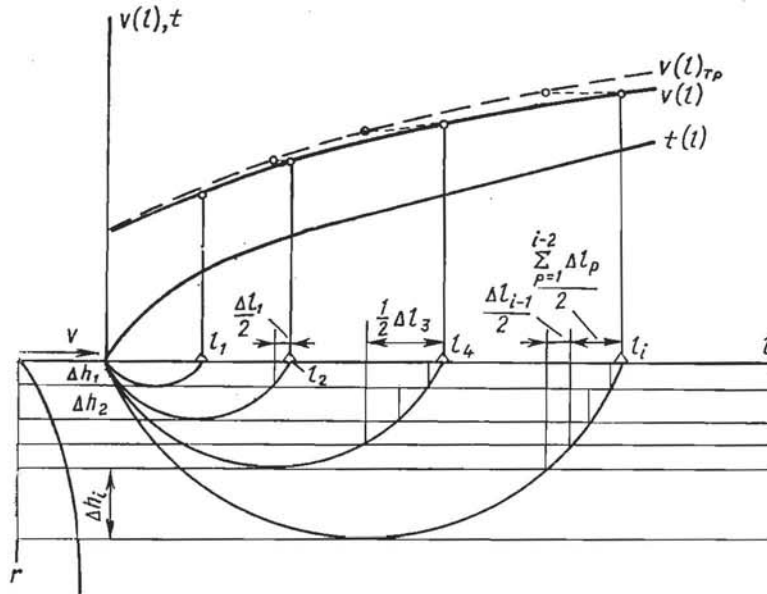


Рис. 4.

задача состоит в определении радиуса исследования, который складывается из мощностей условных слоев, проходимых рефрагированной волной.

Мощность отдельного слоя можно определить в предположении, что измерения проводятся на его кровле, поэтому в измерительный разнос вводится поправка за сейсмический снос в покрывающих слоях. График кажущейся скорости трансформируется к графику  $v(l)_{TP}$  при соблюдении равенства кажущейся скорости для измерительного и эффективного (исправленного за снос) разносов (см. рис. 4).

Мощность первого слоя находится из уравнения

$$\Delta h_1 = \frac{l_1}{2} \left| \frac{1 - m_{0,1}}{1 + m_{0,1}} \right|^{1/2}, \quad (8)$$

где  $m_{0,1} = v(l_0)/v(l_1)$ ;  $v(l_0), v(l_1)$  — кажущиеся скорости, равные соответственно скорости на кровле и подошве слоя.

Аналогично находится мощность последующих слоев. Сейсмический снос в покрывающем слое прямо зависит от его мощности, значений скоростей на границах и обратно пропорциональный скорости на подошве исследуемого слоя [3].

Мощность третьего слоя  $\Delta h_3 = \frac{l_3 - \Delta l_{(2)}}{2} \left| \frac{1 - m_{2,3}}{1 + m_{2,3}} \right|^{1/2}$  и снос в предыдущих слоях

$$\Delta l_{(2)} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta h_1 m_{1,3} (1 + m_{0,1}) + \Delta h_2 m_{2,3} (1 + m_{1,2}).$$

Итак, глубину максимального проникания рефрагированной волны (радиус исследования), равную суммарной мощности  $n$  слоев, можно определить по формуле

$$r_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ l_i - \sum_{p=1}^{i-1} \frac{v(l_p)}{v(l_i)} (1 + m_{p-1,p}) \right] \left| \frac{1 - m_{i-1,i}}{1 + m_{i-1,i}} \right|^{1/2}. \quad (9)$$

Представив общий сейсмический снос в вышележащих слоях по отношению к  $i$ -му слою в виде

$$\Delta l_{(i-1)} = \Delta l_{i-1} + m_{i-1,i} \Delta l_{(i-2)}$$

и

$$\Delta l_{(i-2)} = \sum_{p=1}^{i-2} \Delta h_p \frac{v(l_p)}{v(l_{i-1})} (1 + m_{p-1,p}),$$

получим рекуррентную формулу

$$r_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [l_i - (\Delta l_{i-1} + m_{i-1,i} \Delta l_{(i-2)})] \left| \frac{1 - m_{i-1,i}}{1 + m_{i-1,i}} \right|^{1/2}. \quad (10)$$

Разнос зонда, м	Истинная скорость рефрагированной волны, м/сек		Радиус исследования, м		Относительный градиент скорости (среднее значение), м <sup>-1</sup>	
	I	II	I	II	I	II
0,2	3000	3000	0	0		
0,5	3060	3090	0,016	0,018		
1,0	3120	3120	0,064	0,061		
1,5	3290	3280	0,162	0,160	0,601	0,597
2,0	3570	3540	0,302	0,302		
2,5	4000	3950	0,5	0,5		

Формула (10) позволяет сравнительно просто найти радиус исследования. Определяя прирост радиуса как мощность последующего  $i$ -го слоя, сейсмический снос складывается из его величины в  $i - 1$ -м слое и суммарного сноса до  $i - 2$ -го слоя включительно, который равен произведению коэффициента  $m_{i-1,i}$  на величину сноса, используемого в предыдущем члене суммы. Так же находится относительный градиент скорости в пределах условно выделенных слоев. Исходя из работы [5], он определяется по следующей формуле:

$$G_{i-1 \vee i} = \frac{v'(r)}{v(r)} \Big|_{r=h_{i-1} \vee h_i} = 2 \sqrt{2} (l_i - \Delta l_{(i-1)})^{-1} \left| \frac{1 - m_{i-1,i \vee i-1}}{1 + m_{i-1,i \vee i-1}} \right|^{1/2}, \quad (11)$$

где  $\vee$  — знак дизъюнкции. Значение  $G$  относится к той границе ( $i - 1$  или  $i$ -го) слоя, на которой ниже скорость упругих волн.

Таким образом, по величине кажущейся скорости по годографу и соответствующему ей радиусу исследования легко построить зависимость истинной скорости и ее относительного градиента от глубины.

С целью проверки приведенных формул сравнивались параметры, полученные прямым (I) и обратным (II) путями, а именно: по заданной зависимости скорости с глубиной  $v(r) = v_0 \exp(Gr)$  и по годографу рефрагированной волны для указанной зависимости в модели среды с граничными условиями  $h = 0,5$  м,  $v_0 = 3000$  м/сек,  $v(h) = 4000$  м/сек [5]. Из таблицы видно, что относительная погрешность определения параметров графо-аналитическим способом находится в допустимых пределах (1—3%).

## Выводы

1. В окологлавиной среде возникают рефрагированные волны различных типов, кинематические свойства которых определяются скоростным строением среды.

2. Возможность образования рефрагированно-преломленной волны зависит от характера изменения скорости упругих волн в слое и на его подошве, а также по отношению к покрывающим слоям. В прискважинной зоне указанная волна возникает на «несущем кольце».

3. Годограф рефрагированных волн в разрезе с переменным градиентом увеличения скорости упругих волн с глубиной характеризуется плавным возрастанием кажущейся скорости с увеличением разноса. При наличии в разрезе зон инверсии скорости годограф может быть осложнен «выпадением» ветвей, разрывами, петлями или точками возврата.

4. Зависимость истинной скорости от глубины в неоднородном скоростном разрезе определяется посредством графо-аналитической обработки кривой кажущейся скорости. Предложен оперативный способ нахождения глубины максимального проникания и относительного градиента скорости рефрагированных волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Авербух А. Г.— В кн.: Прикладная геофизика, 44. «Недра», М., 1965.
2. Левин А. Н.— В кн.: Прикладная геофизика, 49. «Недра», М., 1967.
3. Назарный С. А.— В кн.: Прикладная геофизика, 45. «Недра», М., 1965.
4. Облогина Т. И., Пийп В. Б.— Вест. Московского ун-та. Сер. геол., 1971, 6.
5. Петкевич Г. И., Лещук В. В.— В кн.: Геофизический сборник АН УССР, 42. «Наукова думка», К., 1971.
6. Файзуллин И. С., Ивакин Б. Н., Цыплаков В. И.— Материалы конференции «Акустические методы исследования нефтяных и газовых скважин». ОНТИ ВНИИЯГ, М., 1972.

Львовский филиал математической  
физики Института математики  
АН УССР

Поступила в редколлегию  
в декабре 1973 г.

### ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД

**Г. И. Петкевич**

Современный период развития науки характеризуется интенсивным проникновением математических методов в различные области человеческого знания. В связи с необходимостью обработки и анализа массовых и разнородных данных наблюдений широкое проникновение математики началось и в науку геологического профиля. В последние годы отмечается увеличение количества работ в области «математической геологии» [3, 4, 7, 8, 15]. Математизация геологических дисциплин становится важнейшей предпосылкой их дальнейшего прогресса.

Можно выделить три этапа математизации геологических наук [9]. Первый — количественная обработка эмпирических данных, которая осуществляется сегодня с помощью методов математической статистики и широкого использования ЭВМ. Второй этап характеризуется применением математических моделей изучаемых объектов, построенных на основе обобщения теоретических и эмпирических данных. Третий этап связан с построением математической теории геологических объектов и процессов. Можно сказать, что второй и третий этапы пока только намечаются в отдельных отраслях геологической науки. Именно математическое моделирование геологических задач (а не простое применение количественных методов обработки) положено в основу определения «математической геологии» [3].

Природа неоднородности геологических сред и ее формальное описание. Рассмотрение горных пород как однородных сред при изучении их физических свойств не соответствует современному состоянию исследования веще-