

ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ОБУСЛОВЛЕННЫЙ ПРОЦЕССОМ ТЕРМОДИФфуЗИИ

М. С. Раврик

В твердых телах (растворах), свободных от силовых воздействий, неравномерный нагрев, а также неравномерное распределение частиц растворенного вещества обуславливают появление температурных и концентрационных напряжений, величина и характер которых существенно влияют в некоторых случаях на их механическое поведение [1, 4, 7]. Диффузионная теория деформации достаточно хорошо развита в работах [5, 6], где записаны основные уравнения, учитывающие взаимосвязь этих процессов, и сформулирована математическая постановка краевых задач.

Ниже приведено исследование распределения концентрации вещества в пластине с круговым отверстием при неравномерном ее нагреве, а также определены температурные и концентрационные напряжения.

Рассмотрим круглокольцевую пластину с жестко заземленным внешним краем. Внутренний контур отверстия считаем свободным. Материал пластины, внутренний и внешний радиусы которой обозначим r_1 и r_2 соответственно, в начальный момент времени представляет собой однородный двухкомпонентный твердый раствор постоянной концентрации c_0 при температуре t_0 .

Пусть к поверхности пластины $z = h$, через которую осуществляется массообмен с внешней средой, внезапно подводится тепловой поток $q' = -q$, где q — плотность потока в направлении внешней нормали к срединной поверхности. Контур пластины $r = r_1$ и $r = r_2$, а также поверхность $z = -h$ предполагаются тепло- и массоизолированными. Тепловой поток q' и химический потенциал диффундирующего вещества во внешней среде μ_c сохраняются постоянными во времени.

Если направить координатную ось oz вдоль внешней нормали к срединной поверхности пластины, то искомые величины $c' = c - c_0$, $t' = t - t_0$, как это следует из условий задачи, являются лишь функциями z и τ . Пренебрегая влиянием концентрации и деформации тела на распределение в нем температуры, а также влиянием деформации на диффузионные процессы, известные уравнения [5, 6] можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 t'}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t'}{\partial \tau}, \quad (1)$$

$$D_c \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} + D_t \frac{\partial^2 t'}{\partial z^2} = \frac{\partial c'}{\partial \tau} \quad (2)$$

с краевыми условиями для температуры и концентрации:

$$\lambda \frac{\partial t'}{\partial z} = q' \text{ при } z = h,$$

$$\frac{\partial t'}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h, \quad t'(z, 0) = 0; \quad (3)$$

$$D_c \frac{\partial c'}{\partial z} + D_t \frac{\partial t'}{\partial z} + H (d_c^{e,T} c' + d_T^{e,c} t' - \mu_c) = 0 \text{ при } z = h, \quad (4)$$

$$\frac{\partial c'}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h, \quad c'(z, 0) = 0,$$

где a — коэффициент температуропроводности; λ — коэффициент теплопроводности; D_c , D_t — коэффициенты диффузии; $d_c^{e,T}$, $d_T^{e,c}$ — коэффициенты, характеризующие изменение химического потенциала частиц растворенного вещества с изменением его концентрации и температуры соответственно; H — коэффициент массообмена.

Прогиб пластины w при наших условиях задачи для случая осесимметричных температурных и концентрационных полей находим из уравнения

$$\Delta \Delta w = 0 \quad (5)$$

при граничных условиях на контурах пластины [8]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\right) \omega + r_1^2 \frac{1+\nu}{h} F_2 = 0 \text{ при } \rho = 1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\right) \omega + r_1^2 \frac{1+\nu}{h} F_2 \right] = 0,$$

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = r_2. \quad (7)$$

Здесь $F_2 = \alpha_t T_2 + \alpha_c C_2$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$; $\rho = \frac{r}{r_1}$;

T_2, C_2 — интегральные характеристики температуры и концентрации; α_t, α_c — линейный коэффициент температурного и концентрационного расширения соответственно; ν — коэффициент Пуассона.

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям (1), (3), находим искомого температурное поле [2] для пластины:

$$t'(z, \tau) = \frac{q'}{\lambda} \left[\frac{\tau a}{2h} + \frac{(z+h)^2}{4h} - \frac{h}{3} - \frac{4h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(n\pi \frac{z+h}{2h}\right) e^{-n^2 \pi^2 \tau_0} \right]. \quad (8)$$

Соответственно распределение концентрации растворенного вещества с учетом условий (4) получим в виде

$$c'(z, \tau) = \frac{1}{Hd_c^{e,T}} \left\{ m_1 - am_2 \left[\gamma_0 + \frac{\tau}{2h} + \frac{(z+h)^2}{4hD_c} \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \cos\left(\omega_n \frac{z+h}{2h}\right) e^{-\frac{\omega_n^2}{a} D_c \tau_0} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \cos\left(\theta_n \frac{z+h}{2h}\right) e^{-n^2 \pi^2 \tau_0} \right\} + \frac{D_t}{a-D_c} t'(z, \tau), \quad (9)$$

где

$$A_n^{(1)} = \frac{\sin \omega_n}{\omega_n} \left[\frac{m_1 \omega_n + 2hm_2 \sqrt{\frac{a}{D_c}} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{D_c}{a}} \omega_n}{\omega_n + \sin \omega_n \cos \omega_n} \right];$$

$$m_1 = H\mu_c - \frac{q'}{\lambda} \frac{aD_t}{a-D_c};$$

$$A_n^{(2)} = \frac{4hm_2}{n^2 \pi^2} \left[\frac{Hd_c^{e,T}}{D_c \theta_n \sin \theta_n - 2hHd_c^{e,T} \cos \theta_n} \right]; \quad m_2 = \frac{q'}{\lambda} H \frac{ad_T^{e,c}}{a-D_c};$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \frac{h}{a} - \frac{1}{Hd_c^{e,T}} - \frac{h}{D_c}; \quad \theta_n = n\pi \sqrt{\frac{a}{D_c}}; \quad \tau_0 = \frac{a}{4h^2} \tau.$$

Величины ω_n являются корнями уравнения

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2hHd_c^{e,T}}{D_c \omega}.$$

В случае изотермического процесса $q' = 0$ из выражения (9) находим

$$c'(z, \tau) = \frac{\mu_c}{d_c^{e,T}} \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n \cos\left(\omega_n \frac{z+h}{2h}\right)}{\omega_n + \sin \omega_n \cos \omega_n} e^{-\frac{\omega_n^2}{a} D_c \tau_0} \right]. \quad (10)$$

Из формулы (10) при $z = h$ следует, что концентрация растворенного вещества на поверхности пластины со временем меняется.

Положив $H \rightarrow \infty$, т. е. при условии, что на поверхности пластины концентрация растворенного вещества имеет определенное постоянное значение

$c_1 = \frac{\mu_c}{d_c^{e,T}}$, получим выражение

$$c'(z, \tau) = c_1 \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos \frac{\pi}{4h} (2n-1)(z+h) e^{-\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\right]^2 \frac{D_c}{a} \tau_0} \right], \quad (11)$$

совпадающее с решением соответствующей задачи теплопроводности [3]. При $\mu_c = 0$, когда диффузионный процесс в пластине обусловлен только неравномерным нагревом, из выражения (9) при $H \rightarrow \infty$ находим

$$c'(z, \tau) = \frac{ma}{a_c^{e,T}} \left[\frac{2}{3} \frac{h}{a} + \frac{\tau}{2h} + \frac{(z+h)^2}{4hD_c} - \frac{h}{D_c} - \frac{4h}{a\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\theta_n \frac{z+h}{2h}\right)}{n^2 \cos \theta_n} e^{-n^2 \pi^2 \tau_0} + \frac{16h}{a\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{a}{D_c}} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{D_c}{a}} \frac{\pi}{2} (2n-1)}{(2n-1)^2} \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{\pi}{4h} (2n-1)(z+h) e^{-\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\right]^2 \frac{D_c}{a} \tau_0} \right] + \frac{D_t}{a-D_c} t'(z, \tau), \quad (12)$$

где

$$m = -\frac{q'}{\lambda} \frac{ad_c^{e,c}}{a-D_c}.$$

Зная распределение температуры и концентрации, находим, согласно (5) — (7), значение квазистатического прогиба круглокольцевой пластины в виде

$$\omega = \frac{1+\nu}{2h} \frac{r_1^2 F_2}{[1+\nu+k^2(1-\nu)]} \left[k^2 \left(1 + 2 \ln \frac{\rho}{k} \right) - \rho^2 \right]. \quad (13)$$

Здесь

$$F_2 = \frac{q'h}{\lambda} \alpha_t \left[\left(1 + \frac{D_c}{\varepsilon a} \gamma_{c,t} \right) T_2^* - \frac{\gamma_{c,t}}{\varepsilon} C_2^* \right]; \quad (14)$$

$$T_2^* = \frac{1}{2} - \frac{48}{\pi^4} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 \pi^2 \tau_0}; \quad \varepsilon = 1 - \frac{D_c}{a}; \quad k = \frac{r_2}{r_1};$$

$$C_2^* = \frac{a}{2D_c} +$$

$$+ 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \omega_n \left(2hH_1 \sqrt{\frac{a}{D_c}} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{D_c}{a}} \omega_n - \omega_n \right) [(1+hH_1) \cos \omega_n - 1]}{\omega_n^4 (\omega_n + \sin \omega_n \cos \omega_n)} \times$$

$$\times e^{-\frac{\omega_n^2 D_c}{a} \tau_0} + 24 \frac{D_c}{a\pi^4} hH_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n \sin \theta_n + 2(\cos \theta_n - 1)}{n^4 (\theta_n \sin \theta_n - 2hH_1 \cos \theta_n)} e^{-n^2 \pi^2 \tau_0};$$

$$\gamma_{c,t} = \frac{\alpha_c d_c^{e,c}}{\alpha_t d_c^{e,T}}; \quad H_1 = \frac{H}{L};$$

L — характеризует подвижность атомов растворенного вещества при диффузии.

В случае нестационарного конвективного теплообмена между поверхностью $z = h$ пластины и окружающей средой

$$\frac{\partial t'}{\partial z} + h_t (t' - t_c) = 0 \quad (15)$$

при прежних условиях задачи искомая величина F_2 определяется выражением

$$F_2 = -6 \left\{ \alpha_t t_c \left(1 + \frac{\gamma_{c,t} D_c}{\varepsilon a} \right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(3)} \frac{1}{\mu_n^2} [\mu_n \sin \mu_n + 2 (\cos \mu_n - 1)] e^{-\mu_n^2 \tau_0} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(4)} \frac{1}{\mu_n^{*2} D_c h_t} [\mu_n^* \sin \mu_n^* + 2 (\cos \mu_n^* - 1)] e^{-\mu_n^{*2} \tau_0} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(5)} \frac{1}{\omega_n D_c H_1} [\omega_n \sin \omega_n + 2 (\cos \omega_n - 1)] e^{-\omega_n^2 \tau_0} \right\}, \quad (16)$$

где

$$A_n^{(3)} = \frac{\sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}; \quad \mu_n^* = \mu_n \sqrt{\frac{a}{D_c}}; \\ A_n^{(4)} = A_n^{(3)} \frac{[2h (h_t m_3 - H_1 m_4) \cos \mu_n - (m_3 - m_4) \mu_n \sin \mu_n]}{2h H_1 \cos \mu_n^* - \mu_n^* \sin \mu_n^*}; \\ A_n^{(5)} = \frac{\sin \omega_n [2h (h_t m_3 - H_1 m_4) \cos \omega_n^* - (m_3 - m_4) \omega_n^* \sin \omega_n^*]}{(\omega_n + \sin \omega_n \cos \omega_n) (2h h_t \cos \mu_n^* - \mu_n^* \sin \mu_n^*)}; \\ m_3 = H \mu_c; \quad m_4 = \frac{a D_t}{a - D_c} h_t t_c; \quad \omega_n^* = \omega_n \sqrt{\frac{D_c}{a}};$$

h_t — коэффициент теплообмена; μ_n — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{2h h_t}{\mu}.$$

Зная распределение температурных и концентрационных полей, а также прогиб пластины, находим [8] усилия и моменты:

$$M_\rho = D F_2 \left\{ \frac{k^2 (1 - \nu) + \rho^2 (1 + \nu)}{\rho^2 [1 + \nu + k^2 (1 - \nu)]} + 1 \right\}, \quad (17) \\ M_\varphi = -D F_2 \left\{ \frac{k^2 (1 - \nu) - \rho^2 (1 + \nu)}{\rho^2 [1 + \nu + k^2 (1 - \nu)]} - 1 \right\}, \quad D = \frac{2}{3} \frac{E h^3}{1 - \nu},$$

где вместо F_2 необходимо подставить выражения из (14) или (16). В пределе при $r_2 \rightarrow \infty$ из (17) получим значения моментов в бесконечной пластине с круговым отверстием.

Для случая, когда к поверхности $z = h$ пластины внезапно подводится тепловой поток, проведены числовые расчеты концентрации растворенного вещества на поверхности пластины в зависимости от параметра hH_1 , температурных и концентрационных моментов по контуру отверстия.

На рис. 1, согласно формуле (10), построены кривые распределения относительной величины $\frac{c'(z, \tau)}{c_1}$ на поверхности пластины для $hH_1 = 1$ (сплош-

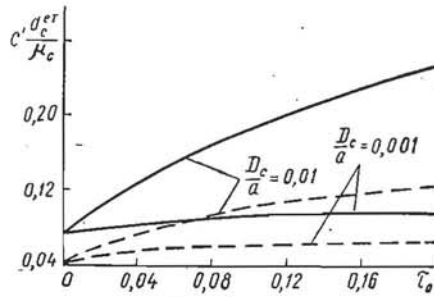


Рис. 1.

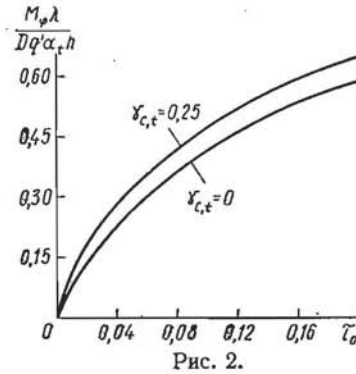


Рис. 2.

ные линии) и $hH_1 = 0,5$ (штриховые) при разных значениях отношения $\frac{D_c}{a}$ ($\frac{D_c}{a} = 0,001; 0,01$). При $hH_1 \rightarrow \infty$ концентрация на поверхности имеет постоянное значение $c'(z, \tau) = \frac{\mu_c}{d_c^{e,T}}$. На рис. 2 показано изменение изгибающего момента $M_\varphi^* = -\frac{\lambda M_\varphi}{Dq'\alpha_t h}$ на контуре отверстия, обусловленного процессами теплопроводности и диффузии. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $hH_1 = 1$; $\frac{D_c}{a} = 0,001$; $k = 2$, $\nu = 0,3$.

С увеличением градиента температуры происходит дополнительное перераспределение растворенного вещества, которое приводит к увеличению изгибающего момента по контуру отверстия. Кривая $\gamma_{c,t} = 0$ соответствует изменению момента M_φ^* во времени, обусловленного только тепловым ударом. Как видно из рисунка, изгибающий момент на контуре пластинки резко возрастает при малых значениях времени и стремится к постоянному значению при $\tau \rightarrow \infty$. С увеличением отношения $\frac{r_2}{r_1}$ значение изгибающего момента возрастает и при $k \rightarrow \infty$ достигает максимальной величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бескорвайный Н. М. и др.— В кн.: *Металлургия и металловедение чистых металлов*, 8. Атомиздат, М., 1969.
2. Коваленко А. Д. *Основы термоупругости*. «Наукова думка», К., 1970.
3. Лыков А. В. *Теория теплопроводности*. «Высшая школа», М., 1967.
4. Любков Б. Я. *Кинематическая теория фазовых превращений*. «Металлургия», М., 1969.
5. Підстригач Я. С.— ДАН УРСР, 1961, 2, 169.
6. Подстригач Я. С., Павлина В. С.— *Прикладная механика*, 1965, 3, 105.
7. Подстригач Я. С., Павлина В. С., Шевчук П. Р.— В кн.: *Концентрация напряжений*. 3. «Наукова думка», К., 1971.
8. Швец Р. Н., Раврик М. С.— В кн.: *Тепловые напряжения в элементах конструкций*, 12. «Наукова думка», К., 1972.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

ВЛИЯНИЕ ОДНОРОДНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ДВОЙКОПЕРИОДИЧНОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

М. В. Хай

Пусть упругая плоскость, ослабленная двоякопериодичной системой прямолинейных термозолированных трещин длиной $2l$, подвержена действию стационарного температурного поля $t_0(x, y) = qy$ (однородного теплового потока q , перпендикулярного к линиям расположения трещин). Найдем возмущение $t(x, y)$ этого температурного поля, а также обусловленные им коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности концов трещин. Отметим, что основное температурное поле не вызывает напряжений в плоскости с трещинами [3].

Обозначим расстояние между центрами трещин по горизонтали и вертикали соответственно через $2a$ и $2b$. Вследствие периодичности задачи рассмотрим прямоугольник с симметрично расположенной трещиной при соответствующих условиях на температуру, перемещения и напряжения на его границе.

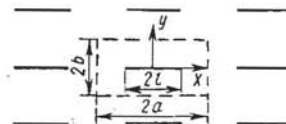


Рис. 1.