

Усеченные системы (11) решались для эллиптического отверстия ($N = 2$) при следующих значениях геометрических, упругих и тепловых характеристик: $HR = 0,315$, $\frac{b}{R} = 0,1$, $\frac{E_k}{E} = 2$, $\frac{\alpha_{kt}}{\alpha_k} = 0,5$, $\frac{\lambda}{\lambda_k} = 4$, $m = 0,5$, $\alpha = 0$, $T_0 = T_c = 0$. Полученные при этом значения напряжений σ_ρ и σ_θ , возникающих в пластинке на контуре сая, приведены в таблице в долях $RE\alpha_q\lambda^{-1}$.

Напряжения на внутреннем крае кольца при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ равны $\sigma_1 = 1,2RE\alpha_q\lambda^{-1}$ и $\sigma_2 = 0$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Караванский О. В.— Прикладная механика, 1970, 6, 7, 85.
2. Мартынович Т. Л., Нищенко И. А.— Прикладная механика, 1972, 8, 7, 67.
3. Мартынович Т. Л.— Прикладная механика, 1970, 6, 9, 59.
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наука», М., 1972.
5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», К., 1968.

Львовский сельскохозяйственный институт,
Львовский государственный университет

Поступила в редколлегию
в январе 1974 г.

ТЕРМОУПРУГОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С ПОДКРЕПЛЯЮЩИМ ЕЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО К КРАЮ ТОНКИМ СТЕРЖНЕМ

О. В. Караванский

Вопрос об упругом взаимодействии полубесконечной пластинки с подкрепляющим ее поперечно стержнем рассматривался рядом авторов в работах [1, 2, 4, 5, 9, 10] в случае нагружения стержня на конце продольной силой. В данной работе исследуется термоупругое взаимодействие полубесконечной

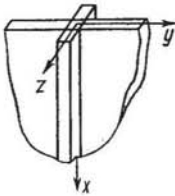


Рис. 1.

пластинки с подкрепляющим ее перпендикулярно к краю тонким полубесконечным стержнем, обусловленное нагревом системы пластинка — стержень по краю и теплоотдачей с ее поверхности.

Рассмотрим тонкую полубесконечную пластинку (рис. 1) толщины 2δ , двухсторонне подкрепленную по линии $y = 0$ перпендикулярно к границе одинаковыми тонкими стержнями прямоугольного поперечного сечения.

Пусть с боковых поверхностей пластинки и стержней осуществляется теплообмен по закону Ньютона со средой постоянной температуры, которую, не умаляя общности, будем считать равной нулю, а на торцевой поверхности поддерживается температура t_0 .

Определим установившееся температурное поле в системе пластинка — стержень в предположении, что тепловой контакт между ними осуществляется по линии. Тогда в соответствии с постановкой задачи, сделанной в работах [3, 6] и с учетом того, что ребро жесткости — тонкий стержень, определение усредненной по толщине пластинки температуры T сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - \varepsilon T = -2 \left(\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \varepsilon_p T \right) \delta(\eta) \quad (1)$$

при таких граничных условиях:

$$T = \vartheta_p = t_0 \text{ при } \xi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = \infty; \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \text{ при } |\eta| = \infty. \quad (2)$$

Здесь введены следующие безразмерные величины и обозначения:

$$\xi = \frac{x}{R}; \eta = \frac{y}{R}; \varepsilon = \frac{\alpha R^2}{\delta \lambda}; \varepsilon_p = \frac{\alpha_p R}{2\delta \lambda}; \kappa = \frac{\lambda_p^*}{2\lambda \delta R}; \quad (3)$$

λ, α и λ_p, α_p — коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи пластинки и ребра соответственно;

$$\lambda_p^* = \frac{2\rho \delta_p h}{1 + \alpha_p r_h}, \alpha_p^* = \frac{\alpha_p (2\delta_p + 2h)}{1 + \alpha_p r_h}, r_h = \frac{h}{\lambda_p} \quad (4)$$

— приведенные коэффициенты теплопроводности, теплоотдачи и термосопротивления ребра; ϑ_p — усредненная температурная характеристика ребра, которая следующим образом представляется через значение температуры пластинки в основании ребра $T(x, 0)$ (для $x > 0$):

$$\vartheta_p = \frac{1}{2\delta_p h} \int_0^h \int_{-\delta_p}^{\delta_p} t_p dz dy = (1 - m) T(x, 0), \quad (5)$$

где

$$m = \frac{1}{2} \alpha_p h^2 [(\lambda_p + \alpha_p h)(h + \delta)]^{-1};$$

$t_p(z, x, y)$ — температурное поле ребра; h и $2\delta_p$ — соответственно высота и толщина ребра; δ (η) — обобщенная дельта-функция Дирака; R — некоторая линейная постоянная величина.

Применяя для решения дифференциального уравнения (1) при граничных условиях (2) метод интегральных преобразований, получаем

$$T = t_0 e^{-\sqrt{\varepsilon} \xi} - (\varepsilon_p - \kappa \varepsilon) \frac{2}{\pi} t_0 \int_0^\infty \frac{\beta e^{-|\eta| \sqrt{\beta^2 + \varepsilon}} \sin \xi \beta d\beta}{(\beta^2 + \varepsilon)(\sqrt{\beta^2 + \varepsilon} + \kappa \beta^2 + \varepsilon_p)}. \quad (6)$$

Второе слагаемое в выражении (6) обусловлено наличием подкрепления и при таких теплофизических характеристиках материала стержня, когда выполняется условие $\varepsilon_p = \kappa \varepsilon$, подкрепление не влияет на распределение температуры в пластинке, т. е.

$$T = t_0 e^{-\sqrt{\varepsilon} \xi}. \quad (7)$$

Рассмотрим упругое взаимодействие нагретых пластинки и подкрепляющего ее стержня, температурные характеристики которых определены соответственно формулами (7) и (5). Стержень мысленно отделим от пластинки, а его действие на пластинку заменим распределенной по линии контакта нагрузкой интенсивности $p(x)$, действующей в плоскости пластинки и направленной вдоль оси x . Поскольку мы рассматриваем симметричное относительно срединной плоскости пластинки подкрепление стержнями-накладками, то в дальнейшем пару таких накладок будем рассматривать как один стержень, находящийся под действием нагрузки интенсивности $-p(x)$, приложенной к его оси.

С целью сведения задачи об определении усилий взаимодействия стержня с пластинкой, как это сделано в случае нагружения стержня на конце осевой силой [5], к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению, запишем термоупругую составляющую ε_{xx}^t компоненты деформации ε_{xx} пластинки на линии $\eta = 0$. После решения с помощью метода интегральных преобразований задачи термоупругости для свободной на краю от напряжений полубесконечной пластинки, находящейся под действием температуры T (6), для ε_{xx}^t на линии $\eta = 0$ найдем

$$\varepsilon_{xx}^t |_{\eta=0} = \frac{4\alpha_t(1+\nu)}{\varepsilon \pi^2} \int_0^\infty q(\beta) \beta \left\{ [\beta \xi Q_1(\xi \beta) - \beta_1 \xi Q_1(\beta_1 \xi)] + \right. \\ \left. + \frac{2\nu}{1+\nu} [Q_2(\xi \beta) - Q_2(\beta_1 \xi)] + \frac{\pi}{2} \frac{(\beta^2 - \beta_1^2) \theta}{\beta \beta_1} \sin \xi \beta \right\} d\beta + \nu \alpha_t t_0 e^{-\sqrt{\varepsilon} \xi}, \quad \xi > 0. \quad (8)$$

Здесь обозначено $\beta_1 = \sqrt{\beta^2 + \varepsilon}$; $Q_1(z) = \text{ci}(z) \sin z - \text{si}(z) \cos z$; $Q_2(z) = -\text{ci}(z) \cos z - \text{si}(z) \sin z$; $q(\beta) = \frac{(\varepsilon_p - \kappa\varepsilon)\beta}{\beta_1(\beta_1 + \kappa\beta^2 + \varepsilon_p)}$; ν , α_t — коэффициенты Пуассона и линейного расширения материала пластинки; $\text{si}(z)$, $\text{ci}(z)$ — интегральный синус и косинус.

Исходя из условия жесткого сцепления между пластинкой и стержнем по линии их соединения, заключающемся, в частности, в равенстве полной деформации пластинки ε_{xx} , состоящей из термоупругой составляющей ε'_{xx} (8), теплового расширения от температуры T (6), составляющей ε''_{xx} , обусловленной действием на пластинку распределенной нагрузки интенсивности $p(x)$ [5] и осевой деформации стержня ε^p , вызванной нагрузкой $p(x)$ и тепловым расширением от температуры ϑ_p (5), придем к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению для определения интенсивности усилий взаимодействия между пластинкой и стержнем $p(x)$:

$$\omega_1 \int_0^{\xi} p(\xi_0) d\xi_0 + \int_0^{\infty} p(\xi_0) K(\xi, \xi_0) d\xi_0 = \omega_2 f(\xi), \quad (9)$$

где

$$K(\xi, \xi_0) = \frac{1}{\xi - \xi_0} + \frac{a_1 \xi^2 + a_0 \xi_0^2 + a_{01} \xi \xi_0}{(\xi + \xi_0)^3};$$

$$a_1 = \frac{5 - 2\nu + \nu^2}{3 + 2\nu - \nu^2}; \quad a_0 = \frac{3 - 6\nu - \nu^2}{3 + 2\nu - \nu^2}; \quad a_{01} = \frac{12 + 4\nu^2}{3 + 2\nu - \nu^2};$$

$$p(\xi) = R\rho(\xi R);$$

$$\omega_1 = \frac{8\pi E \delta R}{E_p F_p (3 + 2\nu - \nu^2)}; \quad \omega_2 = E_p F_p \omega_1;$$

$f(\xi) = [\alpha_t T + \varepsilon'_{xx}]_{\eta=0} - \alpha^p \vartheta_p$, E и E_p — модуль Юнга материала пластинки и стержня, F_p — площадь поперечного сечения стержня. При этом должно выполняться условие

$$\int_0^{\infty} p(\xi) d\xi = 0, \quad (10)$$

которое следует из статического равновесия стержня.

Для решения уравнения (9) при условии (10) применим интегральное преобразование Меллина [7]

$$\bar{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \xi^{s-1} d\xi, \quad s = \sigma + i\tau, \quad (11)$$

сделав при этом следующие предположения относительно $p(\xi)$: 1) функция $\xi^{\sigma-1} p(\xi)$ абсолютно интегрируемая в интервале $(0, \infty)$ для $d_1 < \sigma < 1$ ($0 < d_1 < 1$); 2) $\xi^{\sigma} \int_0^{\xi} p(\xi_0) d\xi_0 \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ для $d_1 < \sigma < 1$. Тогда, применяя интегральный оператор (11) к уравнениям (9) и (10), после несложных преобразований приходим к разностному уравнению с переменными коэффициентами для функции $\bar{p}(s)$:

$$\omega_1 \bar{p}(s+1) + \frac{\pi s}{\sin \pi s} [\cos \pi s - a_1 + a_2 (s-1)^2] \bar{p}(s) = \omega_2 \bar{f}(s) \quad (d_1 < \text{Res} < 1) \quad (12)$$

при условии

$$\bar{p}(1) = 0, \quad (13)$$

где

$$a_2 = 2(1 + \nu)^2 (3 + 2\nu - \nu^2)^{-1}.$$

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon_p = \kappa\varepsilon$. Тогда $f(\xi)$ принимает вид

$$f(\xi) = [\alpha_t(1 + \nu) - \alpha_t^p(1 - \bar{m})] t_0 e^{-\varepsilon_1 \xi}, \quad (14)$$

а для $\bar{f}(s)$ соответственно получим

$$\bar{f}(s) = [\alpha_t(1 + \nu) - \alpha_t^p(1 - \bar{m})] t_0 \frac{\Gamma(s)}{\varepsilon_1^s}, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad (15)$$

где $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon}$; $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

Для решения уравнения (12) применим метод последовательных приближений. Для n -го приближения $\bar{p}_n(s)$ ($n = 0, 1, \dots, n$) получим

$$\begin{aligned} \bar{p}_n(s) = & \frac{\gamma \Gamma(s) \sin \pi s}{\varepsilon_1^s [\cos \pi s - a_1 + a_2(s-1)^2]} \left\{ 1 - \omega \frac{\sin \pi(s+1)}{\cos \pi(s+1) - a_1 + a_2 s^2} + \dots \right. \\ & \left. \dots + (-\omega)^n \prod_{\mu=1}^n \frac{\sin \pi(s+\mu)}{\cos \pi(s+\mu) - a_1 + a_2(s+\mu-1)^2} \right\} \quad (d_1 < \operatorname{Re} s < d_2, \\ & 0 < d_1 < d_2 < 1), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\gamma = [(1 + \nu)\alpha_t - \alpha_t^p(1 - \bar{m})] \frac{t_0 \omega_2}{\pi}; \quad \omega = 2\pi E [E_p \delta_p h (3 + 2\nu - \nu^2) \sqrt{\frac{\alpha}{\delta \lambda}}]^{-1};$$

d_1 — действительный корень уравнения

$$\cos \pi s - a_1 + a_2(s-1)^2 = 0; \quad (17)$$

d_2 — наименьшая положительная действительная часть корней уравнения

$$\cos \pi(s+n) - a_1 + a_2(s+n-1)^2 = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Условие (13) для каждого приближения $\bar{p}_j(s)$ ($j = 0, 1, \dots$) удовлетворяется автоматически.

Некоторый анализ действительных корней уравнения (17) в зависимости от коэффициента Пуассона ν приведен в работе [5].

Уравнение (17) путем замены $s = 1 + \frac{iz}{\pi}$ приводится к уравнению

$$\operatorname{ch} z + a_1 + a_2 \frac{z^2}{\pi^2} = 0, \quad (19)$$

которое встречается в работе [8], где приведены первые его пять корней при $\nu = 0,25$ и асимптотические формулы для k -го корня ($k \geq 5$). Корни n -го уравнения (18) $s_k^{(n)}$ выражаются через значения корней $s_k^{(0)}$ уравнения (17) по формуле $s_k^{(n)} = s_k^{(0)} - n$.

Исходя из значений корней $s_k^{(n)}$, находим, что область регулярности функции $\bar{p}_n(s)$ будет полоса $0,219 < \operatorname{Re} s < 0,719$ (при $\nu = 0,25$).

Анализируя поведение n -го множителя в n -м слагаемом n -го приближения $\bar{p}_n(s)$ в указанной выше полосе регулярности, можно доказать равномерную сходимость процесса последовательных приближений при определении решения $\bar{p}(s)$ уравнения (12), если $\omega < 1$. Следовательно,

$$\bar{p}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_n(s) = \frac{\gamma \Gamma(s)}{\varepsilon_1^s} \sum_{n=0}^{\infty} (-\omega)^n \prod_{\mu=0}^n \frac{\sin \pi(s+\mu)}{\cos \pi(s+\mu) - a_1 + a_2(s+\mu-1)^2} \quad (20)$$

будет решением уравнения (12) при $\omega < 1$, а $p(\xi)$ определяется через $\bar{p}(s)$ в соответствии с теоремой обращения преобразования Меллина [7]. Учитывая равномерную сходимость ряда в выражении для $\bar{p}(s)$, к оригиналу будем переходить почленно. Для нулевого приближения получаем

$$p_0(\xi) = 2\gamma \sum_{k=0}^{\infty} [\operatorname{Re} \Omega_{00} \cos(\theta_{k0} \ln \xi_1) - \operatorname{Im} \Omega_{00} \sin(\theta_{k0} \ln \xi_1)] \xi_1^{-\varepsilon_1 k}, \quad (21)$$

где

$$s_k^{(0)} = \rho_{k0} + i\theta_{k0}; \quad \xi_1 = \xi e_1;$$

$$\Omega_{00} = \{\Gamma(1 - s_k^{(0)}) [2a_2 (s_k^{(0)} - 1) - \pi \sin \pi s_k^{(0)}]\}^{-1};$$

$s_k^{(0)}$ — корни уравнения (17), которые берутся слева от прямой интегрирования, лежащей в области регулярности функции, например, $d_1 < \sigma = \frac{1}{2} < d_2$.

Наконец, запишем рекуррентную формулу для n -го приближения $p_n(\xi)$:

$$p_n(\xi) = p_{n-1}(\xi) + (-\omega)^n \Delta_n p(\xi). \quad (22)$$

При этом для $\Delta_n p(\xi)$ получим следующее выражение:

$$\Delta_n p(\xi) = 2\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n [\operatorname{Re} \Omega_{nj} \cos(\theta_{kj} \ln \xi_1) - \operatorname{Im} \Omega_{nj} \sin(\theta_{kj} \ln \xi_1)] \xi_1^{-\rho_{kj}}. \quad (23)$$

Здесь

$$\Omega_{nj} = \frac{\Gamma(s_k^{(j)}) \sin \pi (s_k^{(j)} + 1)}{\psi_j'(s_k^{(j)})} \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{\sin \pi (s_k^{(j)} + i)}{\psi_i(s_k^{(j)})};$$

$$\Psi_i(s) = \cos \pi (s + i) - a_1 + a_2 (s + i - 1);$$

$$\psi_i'(s_k^{(j)}) = \left[\frac{d}{ds} \Psi_i(s) \right]_{s=s_k^{(j)}};$$

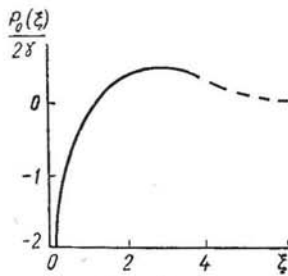


Рис. 2.

$s_k^{(j)} = \rho_{kj} + i\theta_{kj}$ — корни уравнения (18), которые берутся слева от прямой интегрирования.

Следует отметить, что нулевое приближение соответствует решению задачи при $\omega = 0$, т. е. при абсолютно жестком стержне, обладающем только тепловым расширением. Если при этом положить еще $\alpha_i^0 = 0$, то получим решение задачи для нагреваемого квадрата, одна грань которого свободна, а другая жестко закреплена.

Поскольку уравнение (17) слева от прямой интегрирования имеет действительный положительный корень $s_0 = 0,219$, то при $\xi \rightarrow 0$ $p(\xi)$ имеет особенность типа $-\xi^{-0,219}$. На рис. 2 показан характер поведения $p_0(\xi)/2\gamma$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Толкачев В. М.— Изв. АН СССР. Механика, 1965, 3.
2. Григолюк Э. И., Толкачев В. М.— В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. «Наука», М., 1969.
3. Караванский О. В.— Прикладная механика, 1970, 6, 7.
4. Ларькин Ю. И.— Строит. мех. и расчет сооружений, 1968, 5.
5. Муки, Стернберг — Прикладная механика, 1968, 4.
6. Подстригач Я. С., Караванский О. В.— В кн.: Исследования по теплопроводности. «Наука и техника», Минск, 1967.
7. Снеддон И. Преобразование Фурье. ИЛ, М., 1955.
8. Удьянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1963.
9. Alohas J. B., Kupfers W.— Appl. Sci. Res., Sec. A, 1965, 15, 6.
10. Reissner E.— Proc. Nat. Acad. of Sci. U. S. A., 1940, 26.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.