

Полученное решение (16) справедливо для $u_1 \leq u \leq u_1$, где u_1 можно найти из условия $t_c(u_1) = T_{01}$.

При числовом анализе приведенного экстремального решения принималось $u_1 = 73,64$; $u_0 = 17,67$; $T_{01} = \frac{1}{7} T_0$; $\sigma_1^+ = -0,1E\alpha T_0$; $\sigma_2^+ = 0,014E\alpha T_0$.

На рисунке сплошными линиями показано изменение во времени температуры t_c и напряжений σ^\pm на внешней и внутренней поверхностях оболочки. Пунктирными линиями показано изменение температуры t_c и

напряжений σ^\pm при отсутствии ограничений на сжимающие напряжения внешней поверхности оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, М., 1961.
2. Горячев О. А.— Труды Куйбышевского авиационного ин-та, 1971, 48.
3. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.— ПМТФ, 1968, 4.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
5. Подстригач Я. С.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 5. «Наукова думка», К., 1965.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ, КРАЙ КОТОРОЙ ПОДКРЕПЛЕН ТОНКИМ СТЕРЖНЕМ

И. А. Нищенко, Т. Л. Мартынович

Рассмотрим задачу термоупругости для пластинки толщиной h , которая занимает бесконечную область, ослабленную криволинейным отверстием. Контур пластинки L подкреплён симметрично тонким стержнем постоянной ширины b и толщины h . Боковые поверхности пластинки и стержня теплоизолированы, а вдоль внутренней поверхности подкрепляющего стержня происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. На бесконечности задан однородный тепловой поток интенсивности q , направленный под углом α к оси Ox . Внешнее силовое воздействие отсутствует. В этом случае, как известно [1, 2, 4, 5], температура T в пластинке удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta T = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} - H(T - T_0) = 0 \text{ на } L, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q}{\lambda} \cos \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q}{\lambda} \sin \alpha \text{ при } |x|, |y| \rightarrow \infty.$$

Комплексные потенциалы Колосова — Мухелишвили определяются из граничных условий [5], которые запишем в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} d[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] &= (N_1 + iT_1) dt + kd \left[\int T dz \right] & (t \in L), \\ d[\kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}] &= 2\mu d(u + iv) - kd \left[\int T dz \right] & (t \in L). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $H = \lambda_k \alpha_s \lambda^{-1} (\lambda_k + \alpha_s b)^{-1}$; λ_k, λ — теплопроводности материалов кольца и пластинки; α_s — коэффициент теплоотдачи с внутренней поверхности стержня; $k = \frac{1}{4} \alpha_t E$, α_t — температурный коэффициент линейного расширения пластинки; E, μ — модули упругости первого и второго рода; $\kappa = (3 - \nu)(1 + \nu)^{-1}$; ν — коэффициент Пуассона; $T_c = \text{const}$ — температура внешней среды. Аналогичные физические константы, относящиеся к кольцу, будем отмечать внизу индексом «к».

Учитывая, что $T = \text{Re } f(z)$, где $f(z)$ — аналитическая функция комплексного переменного, граничные условия (1) и (2) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} d[f(t) - \overline{f(t)}] - H[f(t) + \overline{f(t)} - 2T_c] e^{-i\beta} dt &= 0, \\ (1 + \kappa) d\varphi(t) &= 2\mu d(u + iv) + (N_1 + iT_1) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

$$d[\kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}] = 2\mu d(u + iv) - kf(t) dt - kd[t\overline{f'(t)}] \quad (4)$$

(β — угол между нормалью к контуру и осью Ox). Будем считать, что температура по ширине стержня изменяется по линейному закону [1, 5]

$$t_k = T + \frac{\eta H \lambda}{\lambda_k} (T - T_c), \quad -b \leq \eta \leq 0. \quad (5)$$

Тогда, рассматривая равновесие и деформацию мысленно выделенного элемента стержня, получаем зависимости [1, 3]

$$\begin{aligned} e &= \frac{r_1}{r} e_1 + \eta \frac{r_1}{r} \frac{d\theta_b}{ds_1} - \alpha_{kt} \left[T + \frac{\eta H \lambda}{\lambda_k} (T - T_c) \right], \\ d(u + iv) &= (e_1 + i\theta_b) dt, \\ (N_1 + iT_1) dt &= -\frac{1}{h} d \left[\frac{dL_b}{dt} + iV_\tau \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где e_1, r_1 — деформация и радиус кривизны волокна стержня на линии спая L ; $r = r_1 + \eta$; θ_b — угол поворота поперечного сечения стержня; V_τ и L_b — продольная сила и изгибающий момент, возникающие в поперечном сечении стержня (точка приведения лежит на линии спая).

Связь между силовыми факторами L_b, V_τ и компонентами деформации e_1, θ_b с точностью до величин порядка $\frac{b}{r_1}$, учитывая формулы (5) и (3), выражается соотношением

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(\frac{dL_b}{dt} + iV_\tau \right) &= -E_k b \left[\frac{b}{2} \frac{d(e_1 + i\theta_b)}{dt} + e_1 e^{i\beta} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b}{r_1} \right) \right] + \\ &+ kb^2 C_1 \frac{df}{dt} + kb^2 C_2 \frac{d\overline{f}}{dt} + E_k b \alpha_{kt} T_c e^{i\beta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$C_{1,2} = \frac{\alpha_{kt} E_k}{\alpha_t E} \left[\left(1 - \frac{2}{3} \frac{\lambda}{\lambda_k} H b \right) \mp \left(\frac{2}{bH} - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) \right].$$

Умножим равенство (3), а также равенства (4) и их сопряженные на произвольную функцию $F(z)$, голоморфную в рассматриваемой области, и проинтегрируем вдоль контура L . В результате получаем интегральные

соотношения, которые служат для определения функций $f(z)$, $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$:

$$\int_L F(t) d[f(t) - \bar{f}(t)] - H \int_L F(t) [f(t) + \bar{f}(t) - 2T_0] e^{-i\theta} dt = 0,$$

$$(1 + \kappa) \int_L F(t) \Phi(t) dt = 2\mu \int_L (e_1 + i\theta_b) F(t) d\bar{t} + \frac{1}{h} \int_L \left(\frac{dL_b}{d\bar{t}} + i\bar{V}_\tau \right) dF(t),$$

$$(1 + \kappa) \int_L F(t) \overline{\Phi(t)} d\bar{t} = 2\mu \int_L (e_1 - i\theta_b) F(t) d\bar{t} + \frac{1}{h} \int_L \left(\frac{dL_b}{dt} - i\bar{V}_\tau \right) dF(t), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \kappa \int_L F(t) \Phi(t) dt + \int_L \bar{t} \Phi(t) dF(t) - \int_L \Psi(t) F(t) dt = \\ & = 2\mu \int_L (e_1 - i\theta_b) F(t) d\bar{t} - k \int_L \bar{f}(t) F(t) d\bar{t} + k \int_L \bar{t} f(t) dF(t), \\ & \kappa \int_L F(t) \overline{\Phi(t)} d\bar{t} + \int_L t \overline{\Phi(t)} dF(t) - \int_L \overline{\Psi(t)} F(t) d\bar{t} = \\ & = 2\mu \int_L (e_1 + i\theta_b) F(t) dt - k \int_L f(t) F(t) dt + k \int_L t f(t) dF(t). \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим область, на которую отображается конформно внешность единичного круга γ при помощи функции

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{(N-1)\zeta^{N-1}} \right) \quad |m| < 1, \quad N = 2, 3, \dots \quad (9)$$

При $R = 2$ это соответствует внешности эллипса, $N = 3$, $m = \frac{2}{3}$ — внешности треугольного, а $N = 4$, $m = -\frac{1}{2}$ — внешности квадратного отверстия с закругленными углами.

В преобразованной области функции $f_1(\zeta) = f[\omega(\zeta)]$, $\Phi_1(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$, $\Psi_1(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$, $F(\zeta) = F[\omega(\zeta)]$ можно разложить в степенные ряды, а функцию $(e_1 + i\theta_b)$ на контуре γ в ряд Фурье:

$$f_1(\zeta) = T_0 + \beta_1 \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{-n}, \quad \Psi_1(\zeta) = k \sum_{n=1}^{\infty} B_n \zeta^{-n},$$

$$\Phi_1(\zeta) = kA_0 + k\beta_2 \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^{-n}, \quad F_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}, \quad (10)$$

$$2\mu(e_1 + i\theta_b) = k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \sigma^n,$$

где σ — аффикс точки контура γ .

Из условия на бесконечности (1) следует, что $\beta_1 = -qR\lambda^{-1}e^{-i\lambda}$. Напряжения будут стремиться к нулю при $|\zeta| \rightarrow \infty$, если выполняются равенства $A_0 = T_0$, $\beta_2 = \beta_1$.

Подставляем теперь выражения (9), (10), (7) в (8) и выполняем интегрирование, считая все E_n , кроме E_j , равными нулю. В результате получаем бесконечные квазирегулярные системы линейных алгебраических уравнений, из которых определяются коэффициенты a_n , α_n , A_n и B_n :

$$\begin{aligned} -\bar{j}a_j + HR \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n h_{n+j}}{N} + \frac{\bar{a}_n h_{n-j}}{N} \right) &= -\beta_1 \delta_{j,1} - 2HR(T_0 - T_0) \frac{h_j}{N} - \\ &- RH \left(\beta_1 \frac{h_{j-1}}{N} + \bar{\beta}_1 \frac{h_{j+1}}{N} \right) \quad (j = 0, 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

$$(1 + \kappa) [T_0 \delta_{j,1} + \beta_1 (\delta_{j,2} - m \delta_{j,(N-2)}) + A_1 \delta_{j,0}] = \alpha_{j-1} - m \alpha_{j+N-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E_{kj}}{16\mu} \frac{b^2}{R^2} \sum_{l=0}^{\infty} m^l [4(Nl+1-j)\alpha_{-Nl-1+j} + (Nl+2+m^2c)(\alpha_{j-1-Nl} + \\
& + \bar{\alpha}_{Nl+1-j}) + mc(\alpha_{j+Nl+N-1} + \bar{\alpha}_{1-j-Nl-N})] + \frac{E_{kj}}{4\mu} \frac{b}{R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n + \bar{\alpha}_{-n} - \\
& - \frac{8\alpha_{kt}}{(1+\nu)\alpha_t} T_c \delta_{n,0}) (q_{\frac{j-1-n}{N}} - mq_{\frac{j-1-n}{N}+1}) + C_{1j} \frac{b^2}{R^2} \left[\beta_1 m^{\frac{j-2}{N}} \delta_{(j-2),Nl} - \right. \\
& \left. - \sum_{l \geq j/N}^{\infty} (Nl+1-j) m^l a_{Nl+1-j} \right] + C_{2j} \frac{b^2}{R^2} \left[-\bar{\beta}_1 m^{\frac{j}{N}} \delta_{j,Nl} + \right. \\
& \left. + \sum_{l \leq \frac{j-2}{N}}^{\infty} (j-1-Nl) m^l \bar{a}_{j-1-Nl} \right] \quad (j=0, 1, 2, \dots); \\
(1+\kappa) [(A_{j+1} - mA_{j+1-N}) - mT_0 \delta_{j,(N-1)} - m\beta_1 \delta_{j,(N-2)}] = \alpha_{-j-1} - m\alpha_{-j-1+N} - \\
- \frac{E_{kj}}{16\mu} \frac{b^2}{R^2} \sum_{l=0}^{\infty} m^l [4(Nl+1+j)\alpha_{-Nl-1-j} + (Nl+2+m^2c)(\alpha_{-j-1-Nl} + \\
+ \bar{\alpha}_{j+1+Nl}) + mc(\alpha_{-j+Nl+N-1} + \alpha_{j+1-Nl-N})] - \frac{E_{kj}}{4\mu} \frac{b}{R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n + \\
+ \bar{\alpha}_{-n} - \frac{8\alpha_{kt}}{(1+\nu)\alpha_t} T_c \delta_{n,0}) (q_{\frac{j+1+n}{N}} - mq_{\frac{j+1+n}{N}-1}) + \\
+ C_{1j} \frac{b^2}{R^2} \sum_{l=0}^{\infty} (Nl+1+j) m^l a_{Nl+1+j} \quad (j=1, 2, \dots); \quad (11) \\
\kappa(A_{j+1} - mA_{j+1-N}) + \frac{mj}{N-1} \bar{A}_{N-1-j} - \bar{B}_1 \delta_{j,0} = \alpha_{-j-1} - m\alpha_{N-j-1} + \\
+ \frac{mj}{N-1} \bar{a}_{N-1-j} - (a_{j+1} - ma_{j+1-N}) + (1+\kappa)m(T_0 \delta_{j,(N-1)} + \beta_1 \delta_{j,(N-2)}) \\
(j=0, 1, 2, \dots); \\
\bar{B}_{j+1} - m\bar{B}_{j+1-N} = j \left(\bar{a}_{j-1} + \frac{m}{N-1} \bar{a}_{j-1+N} \right) - j \left(\bar{A}_{j-1} + \frac{m}{N-1} \bar{A}_{j-1+N} \right) - \\
- (\alpha_{j-1} - m\alpha_{j-1+N}) + (1+\kappa)[T_0 \delta_{j,1} + \beta_1 (\delta_{j,2} - m\delta_{j,(N-2)})] \\
(j=1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
q_l &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{(mx^2)^{|l|}}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} dx & (l=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ 0 & (l - \text{дробное}), \end{cases} \\
c &= \frac{2 - Nm^2 + N - 2}{(1 - m^2)^2}, \quad \delta_{j,n} = \begin{cases} 1 & (j=n), \\ 0 & (j \neq n), \end{cases} \\
h_l &= m(q_{l+1} + q_{l-1}) - (1+m^2)q_l.
\end{aligned}$$

θ	0	$\frac{1}{18}\pi$	$\frac{1}{9}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{9}\pi$	$\frac{5}{18}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{7}{18}\pi$	$\frac{4}{9}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
σ_ρ	-0,65	-0,62	-0,59	-0,50	-0,41	-0,31	-0,18	-0,11	-0,06	0
σ_θ	0,85	0,80	0,75	0,61	0,50	0,37	0,23	0,12	0,08	0

Усеченные системы (11) решались для эллиптического отверстия ($N = 2$) при следующих значениях геометрических, упругих и тепловых характеристик: $HR = 0,315$, $\frac{b}{R} = 0,1$, $\frac{E_k}{E} = 2$, $\frac{\alpha_{kt}}{\alpha_k} = 0,5$, $\frac{\lambda}{\lambda_k} = 4$, $m = 0,5$, $\alpha = 0$, $T_0 = T_c = 0$. Полученные при этом значения напряжений σ_r и σ_θ , возникающих в пластинке на контуре сая, приведены в таблице в долях $RE\alpha q\lambda^{-1}$.

Напряжения на внутреннем крае кольца при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ равны $\sigma_1 = 1,2RE\alpha q\lambda^{-1}$ и $\sigma_2 = 0$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Караванский О. В.— Прикладная механика, 1970, 6, 7, 85.
2. Мартынович Т. Л., Нищенко И. А.— Прикладная механика, 1972, 8, 7, 67.
3. Мартынович Т. Л.— Прикладная механика, 1970, 6, 9, 59.
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наука», М., 1972.
5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», К., 1968.

Львовский сельскохозяйственный институт,
Львовский государственный университет

Поступила в редколлегию
в январе 1974 г.

ТЕРМОУПРУГОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С ПОДКРЕПЛЯЮЩИМ ЕЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО К КРАЮ ТОНКИМ СТЕРЖНЕМ

О. В. Караванский

Вопрос об упругом взаимодействии полубесконечной пластинки с подкрепляющим ее поперечно стержнем рассматривался рядом авторов в работах [1, 2, 4, 5, 9, 10] в случае нагружения стержня на конце продольной силой. В данной работе исследуется термоупругое взаимодействие полубесконечной

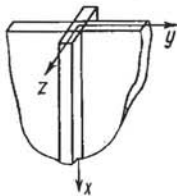


Рис. 1.

пластинки с подкрепляющим ее перпендикулярно к краю тонким полубесконечным стержнем, обусловленное нагревом системы пластинка — стержень по краю и теплоотдачей с ее поверхности.

Рассмотрим тонкую полубесконечную пластинку (рис. 1) толщины 2δ , двухсторонне подкрепленную по линии $y = 0$ перпендикулярно к границе одинаковыми тонкими стержнями прямоугольного поперечного сечения.

Пусть с боковых поверхностей пластинки и стержней осуществляется теплообмен по закону Ньютона со средой постоянной температуры, которую, не умаляя общности, будем считать равной нулю, а на торцевой поверхности поддерживается температура t_0 .

Определим установившееся температурное поле в системе пластинка — стержень в предположении, что тепловой контакт между ними осуществляется по линии. Тогда в соответствии с постановкой задачи, сделанной в работах [3, 6] и с учетом того, что ребро жесткости — тонкий стержень, определение усредненной по толщине пластинки температуры T сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - \varepsilon T = -2 \left(\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \varepsilon_p T \right) \delta(\eta) \quad (1)$$

при таких граничных условиях:

$$T = \vartheta_p = t_0 \text{ при } \xi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = \infty; \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \text{ при } |\eta| = \infty. \quad (2)$$