

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ РЕЖИМОВ НАГРЕВА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

С. Ф. Будз, Ю. Г. Мирончук

Рассмотрим тонкостенную теплоизолированную на внутренней поверхности замкнутую сферическую оболочку радиуса  $R$  и постоянной толщины  $2h$ . Температура на внешней поверхности оболочки изменяется во времени по определенному закону. Начальная температура равна нулю. Для определения переменного по толщине нестационарного температурного поля в произвольный момент времени используем операторную форму решения уравнения теплопроводности, приведенную в работе [5]. Ограничиваясь в решении для заданных начальных и граничных условий кубическим законом изменения температуры по толщине, получаем

$$t(u, \gamma) = T + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) \frac{dT}{du} + \frac{\gamma}{h} T_* + \frac{\gamma}{2h} \left( \frac{\gamma^2}{3h^2} - \frac{1}{5} \right) \frac{dT_*}{du}, \quad (1)$$

где  $\gamma$  — координата по толщине оболочки, отсчитываемая от срединной поверхности;  $u = \frac{\tau}{a^2 h^2}$ ;  $a^{-2}$  — коэффициент температуропроводности;  $\tau$  — время;  $T$ ,  $T_*$  — усредненная температура и температурный момент, которые должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dT_*}{du} - \frac{5}{2} \frac{dT}{du} + \frac{5}{2} T_* &= 0, \\ \frac{1}{5} \frac{dT_*}{du} + T + \frac{4}{3} T_* &= t_c(u), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $t_c(u)$  — температура внешней поверхности оболочки.

Учитывая нулевые начальные условия для температуры оболочки, на основании (1) приходим к следующим начальным условиям для  $T$  и  $T_*$ :

$$T(0) = 0, \quad \dot{T}(0) = 0, \quad T_*(0) = 0, \quad \dot{T}_*(0) = 0. \quad (3)$$

К условиям (3), как это следует из уравнений (2), необходимо присоединить условие  $t_c(0) = 0$ .

При отсутствии внешней силовой нагрузки напряженное состояние оболочки характеризуется меридиональными  $\sigma_s$  и кольцевыми  $\sigma_\beta$  напряжениями, которые определяются по формулам [4]

$$\sigma_s = \sigma_\beta = \sigma = \frac{\alpha E}{1-\nu} [T(u) - t(u)], \quad (4)$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения;  $E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим задачу об определении оптимального по напряжениям режима нагрева по толщине сферической оболочки при следующих ограничениях на изменение температуры  $t_c$  на внешней поверхности оболочки и напряженное состояние на внешней и внутренней поверхностях:

а) функция  $t_c(u)$  для  $0 \leq u \leq u_1$  неотрицательная и ограниченная значением  $T_0$ , а для  $u \geq u_1$  равна  $T_{01}$ , т. е.

$$\begin{aligned} 0 \leq t_c(u) \leq T_0 & \text{ для } 0 \leq u \leq u_1, \\ t_c(u) = T_{01} & \text{ для } u \geq u_1; \end{aligned} \quad (5)$$

б) функция  $t_c(u)$  подчинена системе функциональных условий вида

$$\int_0^{u_1} u^i t_c(u) du = A_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

где  $A_i$  — некоторые постоянные, которые будут использованы в дальнейшем для удовлетворения ограничений на изменение функции в фиксированные моменты времени;

в) температурные напряжения на внешней поверхности  $\sigma^+ = \sigma(h, u)$  и внутренней —  $\sigma^- = \sigma(-h, u)$  изменяются в заданных пределах:

$$\sigma_1^\pm \leq \sigma^\pm \leq \sigma_2^\pm, \quad \sigma_1^+ \leq 0, \quad \sigma_2^\pm \geq 0. \quad (7)$$

Решение задачи будем искать методами вариационного исчисления. В качестве условия оптимальности примем условия минимума функционала энергии упругой деформации [3], которая с учетом выражения [4] для  $\sigma$  и представления (1) для температуры, а также уравнений (2) после интегрирования по  $y$  запишется так:

$$M = \frac{8\pi R^2 a^2 h^2 \alpha^2 E}{75(1-\nu)} \int_0^{u_1} \left[ \frac{11}{35} \left( \frac{dT_*}{du} \right)^2 + \frac{4}{3} T_* \frac{dT_*}{du} + \frac{80}{3} T_*^2 \right] du. \quad (8)$$

Таким образом, функционал  $M$  можно рассматривать как функционал, заданный на множестве функций  $T_*$ , которые связаны с усредненной температурой  $T$  и температурой  $t_c$  внешней поверхности уравнениями (2).

Рассмотренные выше ограничения (5) — (7) на функции  $t_c$  и  $\sigma$  представим в виде соответствующих ограничений на интегральные характеристики температурного поля  $T$  и  $T_*$ .

Используя методику, изложенную в работе [2], функции  $t_c$ ,  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  с учетом ограничений (5) — (7) можно представить в виде

$$t_c = \frac{T_0}{2} [\sin \varphi_1(u) + 1], \quad \sigma^\pm = \frac{\sigma_2^\pm - \sigma_1^\pm}{2} \left[ \sin \varphi_2^\pm(u) + \frac{\sigma_2^\pm + \sigma_1^\pm}{\sigma_2^\pm - \sigma_1^\pm} \right], \quad (9)$$

где  $\varphi_1(u)$ ,  $\varphi_2^\pm(u)$  — некоторые функции.

На основании выражения (4) и системы уравнений (2) из представлений (9) и условий (5) вытекают следующие ограничения на функции  $T$ ,  $T_*$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2^\pm(u)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dT_*}{du} - \frac{5}{2} \frac{dT}{du} + \frac{5}{2} T_* &= 0, \\ \frac{1}{5} \frac{dT_*}{du} + \frac{4}{3} T_* - T - \frac{T_0}{2} [\sin \varphi_1(u) + 1] &= 0, \\ \frac{1}{5} \frac{dT_*}{du} + \frac{4}{3} T_* + \frac{\alpha E \sigma^\pm}{1-\nu} &= 0, \quad \int_0^{u_1} u^i [\sin \varphi_1(u) + 1] du = \frac{2A_i}{T_0} \\ &(i = 0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, решение сформулированной выше задачи сводится к нахождению экстремалей функционала (8) на множестве функций  $T$ ,  $T_*$ ,  $\varphi_1(u)$ ,  $\varphi_2^\pm(u)$ ,  $\sigma^\pm$ , которые удовлетворяют условиям (10).

Из необходимого условия экстремума [1] сформулированной вариационной задачи на условный экстремум приходим к следующей системе уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_*}{du^2} - \frac{2800}{33} T_* &= \left( \frac{70}{33} - \frac{7}{22} \frac{d}{du} \right) [\lambda_1(u) + \lambda_2(u) + \lambda_3(u)] + \\ &+ \left( \frac{175}{44} - \frac{35}{22} \frac{d}{du} \right) \lambda_4(u) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\lambda_1(u) + \frac{5}{2} \lambda_4(u) = 0, \quad \left[ \lambda_1(u) - \sum_{i=0}^n \lambda_{i0} u^i \right] \cos \varphi_1(u) = 0,$$

$$\lambda_2(u) \cos \varphi_2^+(u) = 0, \quad \lambda_3(u) \cos \varphi_2^-(u) = 0.$$

Система уравнений (11) вместе с условиями (10) служит для определения искомых функций  $T$ ,  $T_*$ ,  $\varphi_1(u)$ ,  $\varphi_2^\pm(u)$  и множителей Лагранжа  $\lambda_i(u)$ ,  $\lambda_{i0}$ . Если указанные функции найдены, то последовательно определяем температуру  $t_c$  на поверхности оболочки из второго уравнения (2), по формулам

(1) определяем распределение температуры по толщине оболочки, а затем по формулам (4) находим соответствующее напряженное состояние оболочки. Методику решения такого класса задач проиллюстрируем на следующем примере.

**П р и м е р.** Рассмотрим решение уравнений Эйлера без учета ограничений (7), т. е. экстремальное решение. В этом случае система уравнений (11) сводится к одному уравнению относительно функции  $T_*$ :

$$\frac{d^2 T_*}{du^2} - k^2 T_* = T_0 \left[ \sum_{i=0}^1 \mu_i \left( \frac{26}{15} u^i - \frac{u^{i+1}}{i+1} - \frac{i}{5} u^{i-1} \right) + C \right], \quad (12)$$

где  $k^2 = \frac{2800}{33}$ ;  $\mu_i$  — приведенные множители Лагранжа;  $C$  — произвольная постоянная. На основании уравнений (2) и формул (1), (4), используя решение уравнения (12) для  $T_*$ , определяем  $T$ ,  $t$  ( $\gamma$ ,  $u$ ). В этом случае температурное поле  $t_c$  на внешней поверхности будет иметь вид

$$t_c = T_0 [3,6842 C_1 e^{ku} - 0,2176 C_2 e^{-ku} - \mu_0 (2,8044 - 0,5u^2) + \mu_1 (0,1666u^3 - 2,5926u + 0,0209) + C_3 - C_4 (u + 1,6)], \quad (13)$$

где постоянные  $C_1, C_2, C_3, C_4, \mu_0, \mu_1$  определяются из условий

$$T(0) = T_*(0) = T^*(0), \quad t_c(u_0) = T_0, \quad t_c(u_0) = 0, \quad t_c(u_1) = T_{01}. \quad (14)$$

Перейдем теперь к рассмотрению схемы решения задачи с учетом ограничений. Пусть для полученного экстремального режима (13) при  $0 \leq u \leq u_2$  температура и напряжения не превышают допустимых значений, для  $u = u_2$  сжимающие напряжения на внешней поверхности  $\sigma^+ = \sigma_1^+$ , при  $u > u_2$  — превышают допустимые. В этом случае при  $u_2 < u < u_3$  из системы уравнений (11) и представления (9) для напряжений следует, что  $\sigma^+ = \sigma_1^+$ . При этом условии из уравнений (11) и (10) получим

$$t_c = T_0 (0,35 C_{11} e^{-nu} - 0,75 d_1 u + C_{21}), \quad (15)$$

где  $d_1 = \frac{(1-\nu)\sigma_1^+}{E\alpha T_0}$ ;  $n = \frac{20}{3}$ ;  $C_{11}, C_{21}$  определяются из условия непрерывности температурного поля при  $u = u_2$ ;  $u_3$  определяется из условия  $t_c(u_3) = t_{c1}(u_3)$ .

Допустим, что для  $u_3 \leq u \leq u_4$  ( $u_4 > u_0$ ), при найденном экстремальном режиме, определяемом функцией  $t_c$ , растягивающие напряжения  $\sigma^\pm$  не превышают допустимых. Тогда температурное поле определяется из системы уравнений (2) и условий сопряжения температурного поля при  $u = u_3$ .

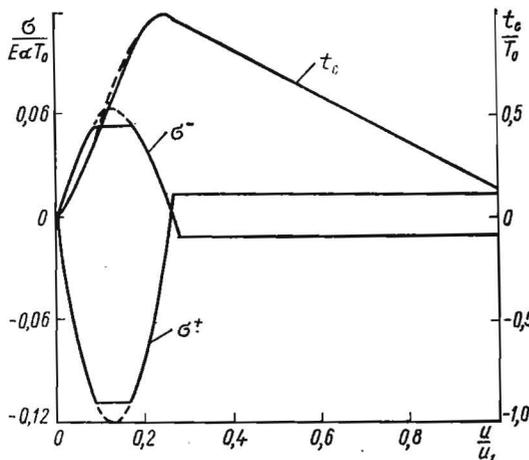
Пусть для  $u = u_4$  растягивающие температурные напряжения достигают своего допустимого значения на внешней поверхности оболочки, т. е.  $\sigma^+ = \sigma_2^+$ , а для  $u > u_4$   $\sigma^+ > \sigma_2^+$ . При этом  $0 < t_c(u) < T_0$ , т. е. согласно формуле (10)  $\cos \varphi_1(u) \neq 0$ .

Из анализа уравнений Эйлера следует, что для обеспечения второго из условий (9) необходимо перейти на режим нагрева, при котором  $\varphi_2^+(u) = \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $\sigma^+ = \sigma_2^+$ .

В рассматриваемом случае система уравнений Эйлера служит для определения множителей  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Выражения для  $T, T_{*3}$  определяются из первых двух уравнений системы (10) при  $\varphi_2^+(u) = \frac{\pi}{2}$ . Если функции  $T_3, T_{*3}$  найдены, то  $t_{c3}$  и соответствующие  $\sigma^\pm$  определяются последовательно по формулам (1), (2), (2). В частности, выражение для  $t_{c3}$  имеет вид

$$t_{c3} = T_0 [B_1 e^{-n(u-u_4)} + B_2 u + B_3] \quad (15)$$

Постоянные интегрирования  $B_1, B_2, B_3$  определяются из условия непрерывности температурного поля при  $u = u_4$ .



Полученное решение (16) справедливо для  $u_3 \leq u \leq u_1$ , где  $u_1$  можно найти из условия  $t_c(u_1) = T_{01}$ .

При числовом анализе приведенного экстремального решения принималось  $u_1 = 73,64$ ;  $u_0 = 17,67$ ;  $T_{01} = \frac{1}{7} T_0$ ;  $\sigma_1^+ = -0,1E\alpha T_0$ ;  $\sigma_2^+ = 0,014E\alpha T_0$ .

На рисунке сплошными линиями показано изменение во времени температуры  $t_c$  и напряжений  $\sigma^\pm$  на внешней и внутренней поверхностях оболочки. Пунктирными линиями показано изменение температуры  $t_c$  и

напряжений  $\sigma^\pm$  при отсутствии ограничений на сжимающие напряжения внешней поверхности оболочки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, М., 1961.
2. Горячев О. А.— Труды Куйбышевского авиационного ин-та, 1971, 48.
3. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.— ПМТФ, 1968, 4.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
5. Подстригач Я. С.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 5. «Наукова думка», К., 1965.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

### ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ, КРАЙ КОТОРОЙ ПОДКРЕПЛЕН ТОНКИМ СТЕРЖНЕМ

И. А. Нищенко, Т. Л. Мартынович

Рассмотрим задачу термоупругости для пластинки толщиной  $h$ , которая занимает бесконечную область, ослабленную криволинейным отверстием. Контур пластинки  $L$  подкреплён симметрично тонким стержнем постоянной ширины  $b$  и толщины  $h$ . Боковые поверхности пластинки и стержня теплоизолированы, а вдоль внутренней поверхности подкрепляющего стержня происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. На бесконечности задан однородный тепловой поток интенсивности  $q$ , направленный под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ . Внешнее силовое воздействие отсутствует. В этом случае, как известно [1, 2, 4, 5], температура  $T$  в пластинке удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta T = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} - H(T - T_0) = 0 \text{ на } L, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q}{\lambda} \cos \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q}{\lambda} \sin \alpha \text{ при } |x|, |y| \rightarrow \infty.$$