

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОПРЯЖЕННОЙ С ПОЛУСФЕРОЙ

Ю. Д. Зозуляк

Для снятия остаточных сварочных напряжений в крупногабаритных изделиях и узлах, когда необходимо сохранить прочностные свойства основного материала, наиболее технологичным и рациональным способом является локальный отпуск. В связи с этим актуально решение задачи о выборе наиболее выгодного режима локального нагрева, обеспечивающего оптимальные условия релаксации этих напряжений.

Решение задач такого типа для однородных оболочек вращения представлено в работе [2]. При этом в качестве критерия оптимальности принимается условие минимума функционала энергии упругой деформации оболочки.

Ниже в аналогичной постановке определяются постоянные по толщине осесимметричные температурные поля для полубесконечной цилиндрической оболочки, сопряженной с полусферой, когда условия нагрева заданы в виде ограничений на изменение параметров задачи в фиксированных сечениях составной оболочки.

В рассматриваемом случае энергия упругой деформации может быть представлена из двух слагаемых, а именно: энергии упругой деформации для цилиндрической и сферической областей. Если положение точки вдоль меридиана сферической оболочки определить углом  $\varphi$  радиуса-вектора с осью вращения, отсчитываемом от отрицательного направления оси, а положение точки вдоль меридиана цилиндрической части координатой  $x$ , то выражение для энергии упругой деформации составной оболочки можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{K} = & -\frac{\pi D_1}{bR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \left[ \left( R \frac{dV}{d\varphi} \right)^2 - 2\nu RV \frac{dV}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi + (V \operatorname{ctg} \varphi)^2 + \right. \\ & \left. + b \left( \left( \frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 + 2\nu R \frac{d\theta}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi + (\theta \operatorname{ctg} \varphi)^2 \right) \right] d\varphi + \\ & + R \int_0^{\infty} \left[ R \frac{d^3\theta}{dx^3} + b \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] dx, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$V = R \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d\theta}{d\varphi} - \frac{1}{R} (\operatorname{ctg} \varphi - \nu) \theta,$$

$$b = \frac{D_0}{D_1}, \quad D_0 = 2Eh, \quad D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)},$$

$R$  — радиус оболочек,  $D_0$  — жесткость на растяжение,  $D_1$  — изгибная жесткость,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $2h$  — толщина. При этом функция углов поворота  $\theta$  и температура  $T$  связаны между собой разрешающим уравнением

$$\frac{d^4\theta}{d\xi^4} + 4\theta = 4\alpha a \frac{dT}{d\xi} \quad (2)$$

для цилиндрической оболочки и

$$LL(\theta) + (bR^2 - \nu^2)\theta = \alpha b R^2 \frac{dT}{d\varphi} \quad (3)$$

для полусферы. Здесь  $L = \frac{d^2}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi} - \operatorname{ctg}^2 \varphi$ ,  $\xi = \frac{\alpha x}{R}$ ,  $\alpha^4 = \frac{3(1-\nu^2)R^2}{4h^2}$ ,  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения.

К соотношениям (2), (3) необходимо присоединить условия механического сопряжения [3], т. е. условия непрерывности перемещений и уравновешивания усилий и моментов на противоположных сторонах сечения сочленения.

Поскольку функционал энергии упругой деформации (1) задан на множестве функций углов поворота  $\theta$ , то дополнительные ограничения, связанные с условиями локального нагрева, естественно сформулировать также относительно этой функции. Ограничимся нахождением экстремалей этого функционала на множестве допустимых функций, которые кроме условий сопряжения удовлетворяют в фиксированных сечениях  $s = s_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n, s_j < s_{j+1}$ ) следующим условиям:

$$\int_0^{s_j} \theta(s) ds = \theta_j, \quad \frac{d^{(i)}\theta(s_j)}{ds^i} = \theta_{ij} \quad (i = 0, 1, 2), \quad (4)$$

где  $s$  — дуга меридиана, отсчитываемая от полюса сферической оболочки ( $s = R\varphi$  для  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $s = R\frac{\pi}{2} + x$  для цилиндрической области).

Для рассматриваемой задачи из необходимого условия экстремума функционала (1) при ограничениях (4), учитывая соотношения (2), (3) и условия механического сопряжения, получаем систему уравнений для определения экстремальных температурных полей и экстремальных условий на граничные значения температуры ( $T^-$ ,  $T^+$ ) и ее производных в месте сочленения оболочки:

$$\frac{d^3 T}{d\xi^3} = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=0}^2 \lambda_{ij} \delta^{(i)}(\xi - \xi_j) + \lambda_j S_+(\xi_j - \xi) \right], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{d^2 T}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{dT}{d\varphi} + (1 - \nu) T \right] = \\ & = \frac{1 - \nu}{\sin \varphi} \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=0}^2 \gamma_{ij} \delta^{(i)}(\varphi - \varphi_j) + \gamma_j S_+(\varphi_j - \varphi) \right], \quad (6) \end{aligned}$$

$$T^- = T^+, \quad \frac{dT^-}{d\varphi} = a \frac{dT^+}{d\xi}, \quad \frac{d^2 T^-}{d\varphi^2} = a^2 \frac{d^2 T^+}{d\xi^2}. \quad (7)$$

Здесь  $\delta_{(s)}^{(i)}$  —  $i$ -я производная от  $\delta$ -функции;  $S_+(s)$  — функция скачка;  $\lambda_j$ ,  $\lambda_{ij}$ ,  $\gamma_j$ ,  $\gamma_{ij}$  — множители Лагранжа.

В качестве примера рассмотрим случай локального нагрева длинной цилиндрической оболочки, сопряженной с полусферой, при заданной ширине зоны нагрева  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\xi = \eta$ , когда температура в месте сопряжения равна  $T_0$ , а на концах зоны нагрева равна температуре внешней среды. Тогда из уравнений (5), (6) с учетом условий (7) в классе непрерывных вместе с первой производной оптимальных температурных полей получим

$$T = \frac{T_0}{l} \left[ l_1 P_m(\cos \varphi) + l_2 Q_m(\cos \varphi) + l_3 \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} - l_4 \right], \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad (8)$$

$$T = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_1;$$

$$T = T_0 \left[ \left( 2 + \frac{C_2 \eta}{a} \right) \left( \frac{\xi}{\eta} \right)^3 - \left( 3 + 2 \frac{C_2 \eta}{a} \right) \left( \frac{\xi}{\eta} \right)^2 + \frac{C_2}{\eta} \xi + 1 \right], \quad 0 \leq \xi \leq \eta; \quad (9)$$

$$T = 0, \quad \xi \geq \eta,$$

где  $P_m(\cos \varphi)$ ,  $Q_m(\cos \varphi)$  — сферические функции первого и второго рода с индексом  $m = -\frac{1}{2} (1 \mp \sqrt{5 - 4\nu})$ . Коэффициенты  $l_i$ ,  $C_2$  определяются из заданных ограничений на условия нагрева.

Для узких зон нагрева можно получить приближенное выражение температурного поля (8), воспользовавшись разложением сферических функций в ряд Маклорена по степеням  $\cos \varphi$  [1]. Так, с точностью до членов  $\cos^2 \varphi$  температурное поле (8) запишется в виде

$$T = T_0 \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1} \left( 1 - \frac{a}{\eta} \cos \varphi_1 + \frac{m^2 + m - 14}{60} \cos^2 \varphi_1 \right) - \frac{3a}{\eta} \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \varphi_1} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3a}{\eta} \cos \varphi_1 + \frac{m^2 + m - 14}{10} \cos^2 \varphi_1 \right) \frac{\cos^3 \varphi}{\cos^3 \varphi_1} - \frac{m^2 + m - 14}{40} \cos^2 \varphi_1 \frac{\cos^5 \varphi}{\cos^5 \varphi_1} \right],$$

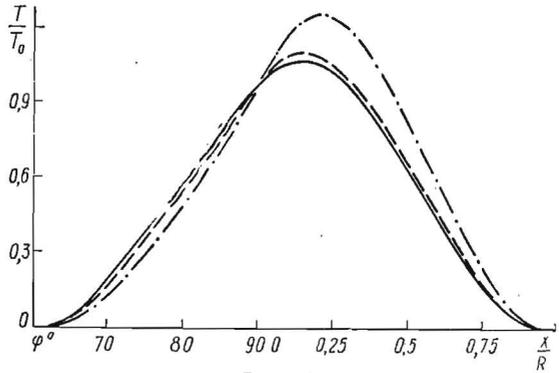


Рис. 1.

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad (10)$$

$$T = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_1.$$

В случае очень узких зон нагрева ( $\cos \varphi \approx 0$ ) выражение (8) будет таким:

$$T = \frac{T_0}{2} \left( 2 - 3 \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1} + \frac{\cos^3 \varphi}{\cos^3 \varphi_1} \right), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad (11)$$

$$T = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_1.$$

На рис. 1 представлены профили оптимальных температурных полей при локальном нагреве сопряженной оболочки с параметрами  $\frac{R}{h} = 40$ ,

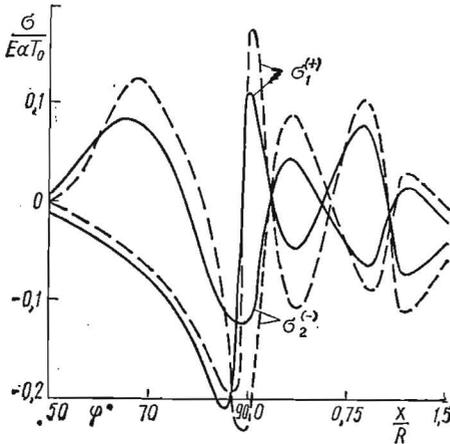


Рис. 2.

$\nu = 0,3$ ;  $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ ;  $\eta = a$ . Сплошной линией изображены результаты вычислений по точным формулам (8), (9), штриховой — по приближенной (10), штрихпунктирной — по формуле (11). Из графиков видно, что в исследуемом случае температурные поля, соответствующие приближенной формуле (10), могут быть хорошей аппроксимацией точного решения. При этом сечение, в котором температура достигает максимального значения, находится в цилиндрической части оболочки и может быть определено из условия  $\frac{dT}{d\xi} = 0$ .

В случае, когда в месте сопряжения оболочек, кроме ограничения на температуру, задано еще ограничение и на ее производную в виде  $\frac{dT}{d\xi} = 0$ , выражение для оптимального температурного поля получим из формул (8), (9), полагая  $C_2 = 0$ .

На рис. 2 приведены результаты числовых расчетов по определению температурных напряжений при локальном нагреве рассмотренной выше сопряженной оболочки. Сплошными линиями показано распределение

осевых ( $\sigma_1^{(+)}$  на внешней поверхности) и кольцевых ( $\sigma_2^{(-)}$  на внутренней поверхности) напряжений, соответствующих оптимальным температурным полям (9), (11); штриховые линии соответствуют случаю, когда наряду с указанными ограничениями на температуру задана равная нулю в месте сочленения ее производная. Из графиков видно, что температурные напряжения достигают максимальной величины в зоне высоких температур и имеют один и тот же порядок.

Исследования показали, что для рассматриваемого случая локального нагрева составной оболочки, изготовленной из одинакового материала, применительно к режимам локального отжига предпочтительными являются оптимальные температурные поля с максимальным значением температуры в месте сопряжения оболочек.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д. — Прикладная механика, 1970, 6, 12.
2. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С. — ПМТФ, 1968, 4.
3. Чернина В. С. Статика тонкостенных оболочек вращения. «Наука», М., 1968.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

## ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НА ОПТИМАЛЬНЫЙ НАГРЕВ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Л. П. Беседина, Я. П. Романчук

При выборе оптимальных режимов локальной термообработки цилиндрической оболочки возникает задача определения таких температурных полей, которые при заданных условиях локального нагрева обеспечивают низкий уровень температурных напряжений.

Постановка и решение такого класса задач для случая однородных цилиндрических оболочек рассмотрены ранее в работах [1, 3], а для бесконечной неоднородной цилиндрической оболочки — в работе [4]. В качестве критерия оптимальности принималось условие минимума функционала упругой энергии оболочки.

Ниже в такой же постановке рассмотрено решение вариационной задачи о нахождении экстремальных температурных полей в неоднородной цилиндрической оболочке радиуса  $R$  и длины  $2L$  при различных условиях закрепления граничных сечений. Неоднородность материала оболочки будем характеризовать изменяющимися вдоль осевой координаты модулем упругости  $E = E(x)$  и коэффициентом линейного температурного расширения  $\alpha = \alpha(x)$ , а значение коэффициента Пуассона  $\nu$  примем постоянным.

Система уравнений равновесия, записанных относительно компонент перемещений, приводится [5] к разрешающему уравнению

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left( E \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + 4E(w_0 - \varepsilon_t) + \frac{4h^2 a^2}{3(1-\nu)R} \frac{d^2}{dx^2} (E\kappa_t) + \frac{2\nu}{h} N_0 = 0, \quad (1)$$

где  $w_0 = \frac{w}{R}$ ;  $w$  — функция прогибов;  $x = \frac{az}{R}$ ;  $z$  — осевая координата;  $l = \frac{aL}{R}$ ;  $a = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)R^2}{4h^2}}$ ;  $2h$  — толщина оболочки;  $\varepsilon_t = \alpha T_1$ ;  $\kappa_t = \frac{\alpha}{h} T_2$ ;  $T_1, T_2$  — интегральные характеристики температуры;  $N_0$  — осевое усилие, определяемое по формуле

$$N_0 = -\frac{h}{\nu l} \left\{ \int_{-l}^l E(w_0 - \varepsilon_t) dx + \left[ \frac{1}{4} \frac{d}{dx} \left( E \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + \frac{h^2 a^2}{3(1-\nu)R} \frac{d}{dx} (E\kappa_t) \right]_{-l}^l \right\}. \quad (2)$$