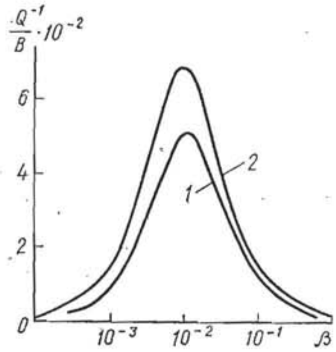
а при больших ($\beta \gg 1$) —

$$Q^{-1} = B\frac{\sqrt{2} - 2e^{-\left(\frac{R}{r_0}-1\right)\beta}\cos\left[\left(\frac{R}{r_0}-1\right)\beta + \frac{\pi}{4}\right]}{2\sqrt{2}\beta^2}.$$

Зависимость приведенного внутреннего трения от частоты для различных значений $\frac{R}{r_0} - 1$ показана на рисунке $\left(1 - \frac{R}{r_0} - 1 = 8 \cdot 10^2,\right.$ $\left. 2 - \frac{R}{r_0} - 1 = 10^3\right)$.



3. В качестве примера микротрещин рассмотрим диски вакансий. Среднюю длину краев вакансионных дисков в единице объема материала можно рассматривать как плотность призматических дислокаций. Пусть $L = 10^9 \frac{1}{см^2}$, $l = 10^{-4}$ *см*, $r_0 = 10^{-7}$ *см*. Оценим величину максимума внутреннего трения для различных материалов при $\left(\frac{R}{r_0} - 1\right) = 10^{+3}$ для $T_0 = 300\ ^\circ$K:

$$\alpha\text{-Fe}\left(\alpha = 12{,}3 \cdot 10^{-6}\frac{1}{град};\ \nu = 0{,}28;\ \mu = 8{,}2 \cdot 10^{11}\frac{дин}{см^2};\right.$$

$$\left. a^2 = 0{,}22\frac{см^2}{сек};\quad k = 0{,}78 \cdot 10^7\frac{эрг}{см \cdot сек \cdot град}\right) Q^{-1}_{\max} = 1{,}74 \cdot 10^{-2};$$

$$\text{Mo}\left(\alpha = 5{,}1 \cdot 10^{-6}\frac{1}{град};\quad \nu = 0{,}31;\quad \mu = 12{,}8 \cdot 10^{11}\frac{дин}{см^2};\right.$$

$$\left. a^2 = 0{,}51\frac{см^2}{сек};\quad k = 1{,}37 \cdot 10^7\frac{эрг}{см \cdot сек \cdot град}\right) Q^{-1}_{\max} = 0{,}65 \cdot 10^{-2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д а р и н с к и й Б. М., Ф о к и н А. Г.— В кн.: Внутреннее трение в металлах и сплавах. «Наука», М., 1966.
2. З и н е р К.— В кн.: Упругость и неупругость металлов. ИЛ, М., 1954.
3. К о в а л е н к о А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
4. Н а д а и А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. «Мир», М., 1969.
5. П о д с т р и г а ч Я. С., Ш в е ц Р. Н.— В кн.: Внутреннее трение в металлах и сплавах. «Наука», М., 1966.
6. Ш е р м е р г о р Т. Д., Д а р и н с к и й Б. М., Ф о к и н А. Г.— В кн.: Релаксационные явления в твердых телах. «Металлургия», М., 1968.

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ РЕЖИМЫ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ

Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич

Температурные поля и напряжения, возникающие в процессе индукционной термообработки, в зависимости от схемы индукционного нагрева, частоты и амплитуды источников внешнего электромагнитного поля, условий теплообмена с внешней средой, условий закрепления элементов конструкций и т. п., могут изменяться в широких пределах и превышать допустимые. Поэтому возникает необходимость постановки и решения задачи оптимизации в требуемом направлении напряженно-деформированного состояния с помощью выбора схем, режимов и условий индукционной термообработки.

Настоящая статья посвящена решению задачи об оптимизации режимов индукционного нагрева по толщине электропроводных пластин при заданных ограничениях на температурные напряжения. Задача решается с использованием методов вариационного исчисления на основе минимизации функционала энергии упругой деформации.

Определение джоулева тепла. Рассматривается тонкая электропроводная пластина толщиной $2l$, отнесенная к декартовой системе координат (рис. 1). На поверхности $x = l$ задана периодическая во времени касательная составляющая напряженности электрического поля с переменной во времени амплитудой $E_y = E_0(\tau)\, e^{i\omega\tau}$, где ω — круговая частота, τ — время.

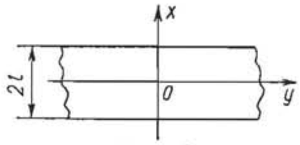


Рис. 1.

Следуя работе [6], примем, что функция $E_0(\tau)$ мало изменяется во времени за период колебания $\frac{2\pi}{\omega}$, так что

$$\left| \frac{dE_0(\tau)}{d\tau} \right| \ll \omega E_0(\tau), \qquad \left| \frac{d^2E_0(\tau)}{d\tau^2} \right| \ll \omega^2 E_0(\tau). \tag{1}$$

В применяемых на практике режимах работы индуктора такие условия имеют место, кроме, быть может, моментов включения и выключения индуктора.

В таком приближении в области слоя отличными от нуля будут составляющие напряженности $E_y(x, \tau) = E_0(\tau)\, E(x)\, e^{i\omega\tau}$ электрического и $H_z(x, \tau) = E_0(\tau)\, H(x)\, e^{i\omega\tau}$ магнитного полей.

На основании уравнений Максвелла, в пренебрежении токами смещения в области слоя [4, 6], учитывая непрерывность касательных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей на границе раздела слой — вакуум ($x = -l$), а также условие (1), для удельной мощности джоулева тепла $Q = \sigma\vec{E} \cdot \vec{E}$, усредненной по периоду колебания электромагнитной волны, находим

$$Q = \frac{\sigma}{2} E_0^2(\tau)\, E(x)\, \tilde{E}(x) = \frac{1}{2} \sigma E_0^2(\tau)\, \frac{m_1 \operatorname{ch}\alpha + \sqrt{2}m \operatorname{sh}\alpha - m_2 \cos\alpha - \sqrt{2}m \sin\alpha}{m_1 \operatorname{ch}\gamma + \sqrt{2}m \operatorname{sh}\gamma - m_2 \cos\gamma - \sqrt{2}m \sin\gamma}, \tag{2}$$

где $\alpha = \frac{l + x}{\delta}$; $m_1 = 1 + m^2$, $m_2 = 1 - m^2$, $m = \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \mu\omega}}$; $\gamma = \frac{2l}{\delta}$, $\delta = (2\mu_0\mu\omega\sigma)^{-\frac{1}{2}}$ — параметр глубины проникновения индукционных токов; σ — коэффициент электропроводности; ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости; $\tilde{E}(x)$ — комплексно-сопряженная к $E(x)$ величина. Здесь при усреднении джоулева тепла по периоду колебания $\frac{2\pi}{\omega}$ учитывались условия (1).

Для частот, используемых при индукционном нагреве,

$$m \gg 1. \tag{3}$$

Учитывая это, из формулы (2) получаем справедливое с достаточной для практических расчетов точностью выражение для джоулева тепла

$$Q = \lambda\varphi(\tau) f(x). \tag{4}$$

Здесь

$$\varphi(\tau) = E_0^2(\tau), \quad f(x) = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\lambda} \frac{\operatorname{ch}\frac{l+x}{\delta} + \cos\frac{l+x}{\delta}}{\operatorname{ch}\gamma + \cos\gamma}, \tag{5}$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

Отметим, что к выражениям (4), (5) можно прийти, решая уравнения Максвелла в пренебрежении токами смещения для области вакуума.

Исходные уравнения теплопроводности и термоупругости. Примем, что пластинка находится в условиях конвективного теплообмена с внешней средой, температура которой равна начальной температуре пластинки. В этом случае температурное поле при заданной функции $\varphi(\tau)$ определяется из решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \varphi(\tau) f(x) = \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{6}$$

при граничных

$$\frac{\partial t^{\pm}}{\partial x} \pm h^{\pm} t^{\pm} = 0 \tag{7}$$

и нулевом начальном условиях. Здесь температура t отсчитывается от начальной; $t^{\pm} = t(\tau, \pm l)$, $\frac{\partial t^{\pm}}{\partial x} = \frac{\partial t(\tau, \pm l)}{\partial x}$; $h^{\pm}$ — относительный коэффициент теплоотдачи на основаниях $x = \pm l$ соответственно; $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности.

При приближенном решении сформулированной задачи теплопроводности в предположении, что распределение температуры по толщине пластины с достаточной точностью может быть аппроксимировано линейным законом

$$t = T_1 + \frac{x}{l} T_2, \tag{8}$$

где

$$T_1 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} t dx, \quad T_2 = \frac{3}{2l^2} \int_{-l}^{l} xt dx,$$

задача сводится к решению двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $T_1(\tau)$ и $T_2(\tau)$ вида

$$\begin{gathered} \left[\frac{d}{d\tau} + \frac{\varkappa}{2l^2}(\mathrm{Bi}^+ + \mathrm{Bi}^-)\right] T_1 - \frac{\varkappa}{2l^2}(\mathrm{Bi}^+ - \mathrm{Bi}^-) T_2 - \varkappa\varphi(\tau) F_1 = 0, \\ \left[\frac{d}{d\tau} + \frac{3\varkappa}{2l^2}(2 + \mathrm{Bi}^+ + \mathrm{Bi}^-)\right] T_2 - \frac{3\varkappa}{2l^2}(\mathrm{Bi}^+ - \mathrm{Bi}^-) T_1 - \varkappa\varphi(\tau) F_2 = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь

$$F_1 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx, \quad F_2 = \frac{3}{2l^2} \int_{-l}^{l} x f(x)\, dx; \tag{10}$$

$\mathrm{Bi}^{\pm} = h^{\pm} l$ — критерий Био.

В качестве исходных соотношений при определении температурных напряжений примем уравнения термоупругости тонких пластин, основанные на гипотезе Кирхгофа — Лява [5]. Примем также, что края пластинки жестко защемлены. В этом случае напряженное состояние изменяется только по толщине и характеризуется компонентами σ_1, σ_2:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \equiv \sigma = -\sigma_0 \frac{x}{l} T_2, \quad \sigma_0 = \frac{\alpha E}{1 - \nu}. \tag{11}$$

Из формулы (11) видно, что в данном случае напряжения достигают наибольшего (наименьшего) значения на основаниях $x = \pm l$.

Постановка и решение вариационной задачи. Рассмотрим задачу об определении оптимальных по напряжениям режимов индукционного нагрева тонкой пластины, осуществляющих нагрев внешней поверхности $x = l$ за время $\tau = \tau_*$ до заданной температуры t_0. Предположим, что в процессе нагрева функция $\varphi(\tau)$, характеризующая изменение во времени джоулева тепла, не превышает значения φ_0 и напряжения σ не превышают величины

σ_*. Будем предполагать также, что функция $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\tau_*} \varphi(\tau)\, d\tau = a_0, \tag{12}$$

где a_0 — заданное число.

Сформулированную задачу будем решать методами вариационного исчисления [2]. В качестве функционального условия оптимальности примем условие минимума функционала энергии упругой деформации

$$M = \int_0^{\tau_*} K d\tau, \tag{13}$$

где K — энергия упругой деформации в фиксированный момент времени для элемента пластинки с единичной площадью срединной плоскости [1, 3]. Учитывая выражения (11), получаем

$$K = \frac{2\alpha\sigma_0 l^2}{3} T_2^2. \tag{14}$$

Функционал (13) определен на множестве функций T_2, которые связаны с функциями T_1 и φ соотношениями (9). Поэтому задачу об определении экстремалей функционала (13) можно сформулировать таким образом.

Найти экстремали функционала M на множестве допустимых функций T_1, T_2, φ, которые связаны между собой уравнениями (9) и удовлетворяют условию (12). При этом

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0, \quad |T_2| \leqslant \frac{\sigma_*}{\sigma_0}, \quad T_1 + T_2 \leqslant t_0. \tag{15}$$

Последние два условия отражают ограничения на уровень температурных напряжений и температуру на внешней поверхности.

Из необходимого условия экстремума функционала без ограничений (15) на допустимые функции находим

$$\begin{gathered} T_2(\tau) - \frac{\varkappa}{2l^2}(\mathrm{Bi}^+ - \mathrm{Bi}^-)\lambda_1(\tau) - \frac{d\lambda_2(\tau)}{d\tau} + \frac{3\varkappa}{2l^2}(2 + \mathrm{Bi}^+ + \mathrm{Bi}^-)\lambda_2(\tau) = 0, \\ -\frac{d\lambda_1(\tau)}{d\tau} + \frac{\varkappa}{2l^2}(\mathrm{Bi}^+ + \mathrm{Bi}^-)\lambda_1(\tau) - \frac{3\varkappa}{2l^2}(\mathrm{Bi}^+ - \mathrm{Bi}^-)\lambda_2(\tau) = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \lambda_1(\tau) F_1 + \lambda_2(\tau) F_2 - b = 0; \\ \lambda_1(\tau_*)\,\delta T_1(\tau_*) - \lambda_1(0)\,\delta T_1(0) + \lambda_2(\tau_*)\,\delta T_2(\tau_*) - \lambda_2(0)\,\delta T_2(0) = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

где $\lambda_1(\tau)$, $\lambda_2(\tau)$, b — множители Лагранжа; $\delta T_i(0)$ — вариации функций $T_i(\tau)$ при $\tau = 0$.

Решая уравнения (16) с учетом нулевых начальных условий на допустимые функции T_1, T_2, т. е. $\delta T_1(0) = \delta T_2(0) = 0$ и $-T_1(\tau_*) + T_2(\tau_*) = t_0$, из вариационного соотношения (17) получаем, что при сформулированных условиях не существует экстремалей функционала M. Поэтому решение задачи необходимо искать на граничных значениях допустимых функций φ, T_1, T_2, исходя из неравенств (15).

Поскольку функции T_1, T_2 связаны с функцией φ уравнениями (9) и в начальный момент времени равны нулю, то на первом этапе индукционного нагрева необходимо положить $\varphi = \varphi_0$. Рассмотрим два характерных случая.

а. При индукционном нагреве на режиме $\varphi = \varphi_0$ для всех τ в интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*$

$$|T|_2 \leqslant \frac{\sigma_*}{\sigma_0} \text{ и } t^+ = T_1(\tau) + T_2(\tau) < t_0. \tag{18}$$

Для $\tau = \tau_*$

$$T_1(\tau_*) + T_2(\tau_*) = t_0. \tag{19}$$

В этом случае искомый режим индукционного нагрева определяется функцией $\varphi(\tau) = \varphi_0$.

б. При индукционном нагреве на режиме $\varphi = \varphi_0$

$$t^+ = T_1(\tau) + T_2(\tau) < t_0, \quad |T_2(\tau)| < \frac{\sigma_*}{\sigma_0} \text{ для } 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1 \ (\tau_1 \leqslant \tau_*), \tag{20}$$

$$|T_2(\tau_1)| = \frac{\sigma_*}{\sigma_0}, \quad |T_2(\tau)| > \frac{\sigma_*}{\sigma_0} \text{ для } \tau > \tau_1.$$

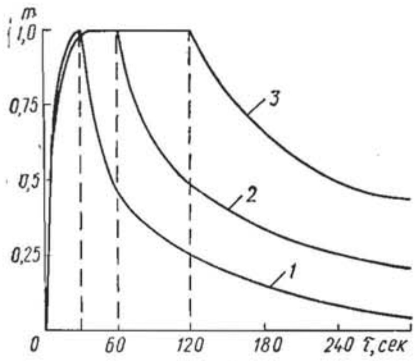


Рис. 2.

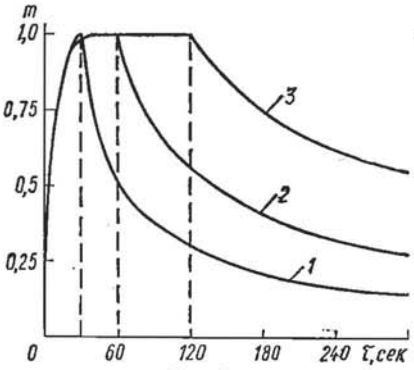


Рис. 3.

В данном случае, начиная с момента $\tau = \tau_1$, необходимо перейти на режим индукционного нагрева, определяемый условием

$$|T_2(\tau)| = \frac{\sigma_*}{\sigma_0}. \tag{21}$$

Численный анализ решения при ограничениях на напряжения. Для режима нагрева при ограничениях на напряжения исследовалась зависимость времени τ_1 перехода из режима $\varphi = \varphi_0$ на режим $\varphi = \varphi_*$ и соответствующего времени выхода τ_{**} на заданную температуру t_0 от времени достижения тем-

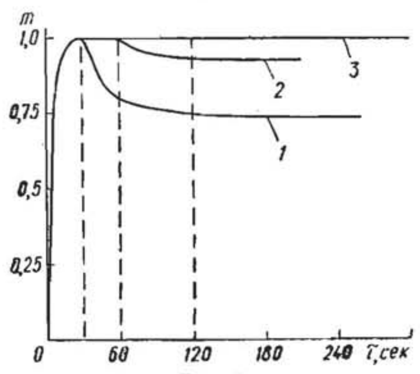


Рис. 4.

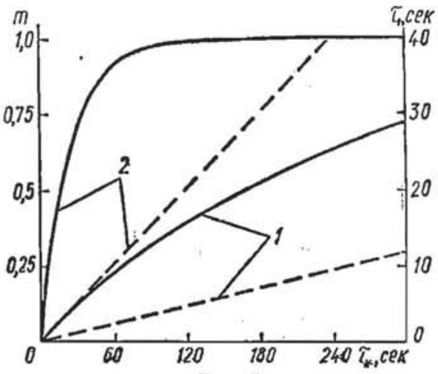


Рис. 5.

пературы t_0 на внешней поверхности при отсутствии ограничений на напряжения (параметр τ_*) уровней допустимых напряжений $\left(\text{параметр } m = \frac{\sigma_*}{|\sigma(\tau_*, -l)|}\right)$ и условий теплообмена (Bi $= 0$ — рис. 2; Bi $= 0{,}1$ — рис. 3; Bi $= 1$ — рис. 4). Анализ проводился для слоя из стали Х18Н9Т при $\delta_* = \frac{1}{\gamma} = 0{,}5$

На рисунках 2—4 приведены графики изменения τ_1 и τ_{**} в зависимости от параметра m для $\tau_* = 30, 60, 120$ *сек* (кривые *1—3* соответственно). При этом каждая из кривых 1—3 слева от вертикальной пунктирной прямой представляет зависимость τ_1 от m, а справа — τ_{**} от m.

Из приведенных результатов следует, что в исследуемом диапазоне изменения параметров нагрева время τ_1 перехода на режим $\varphi = \varphi_0$ мало зависит от времени τ_*, а при $\mathrm{Bi} \geqslant 1$ практически не изменяется с увеличением τ_*. Для каждого Bi с возрастанием τ_1 значение m увеличивается и начиная с некоторого $\tau_1 = \tau_1^0$ величина m практически равна единице. Это означает, что начиная с $\tau = \tau_1^0$ температурное поле при нагреве по режиму $\varphi = \varphi_0$ близко к установившемуся.

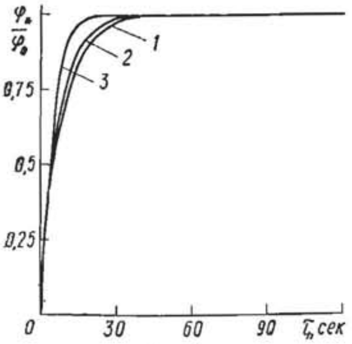


Рис. 6.

Время τ_{**} выхода на заданную температуру t_0 существенно увеличивается с уменьшением m. При этом τ_{**} возрастает с увеличением τ_*. Из рис. 2 видно, что для $m = 0{,}5$ при $\tau_* = 30$ *сек* $\tau_{**} = 55$ *сек*, при $\tau_* = 60$ *сек* $\tau_{**} = 115$ *сек*, а при $\tau_* = 120$ *сек* $\tau_{**} = 235$ *сек*. С возрастанием Bi время τ_{**} при заданном m увеличивается.

На рис. 5 приведена зависимость наименьших значений m (сплошные линии) или τ_1 (штриховые линии) от τ_* при $\delta_* = 0{,}5$ для $\mathrm{Bi} = 0{,}1$; 1 (кривые *1*, *2* соответственно), при которых возможен нагрев внешней поверхности до температуры t_0.

Из приведенных результатов видно, что с ростом τ_* граничные значения m или τ_1 увеличиваются. При $\mathrm{Bi} \geqslant 1$ для $\tau_* > 120$ *сек* наименьшее значение m близко к единице. Отсюда следует, что для таких значений Bi и τ_* возможно обеспечить выход на заданную температуру t_0 при $x = l$, если m не близко к единице.

Рис. 6 иллюстрирует изменение отношения $\frac{\varphi_*}{\varphi_0}$ в зависимости от времени τ_1 переключения из режима $\varphi = \varphi_0$ на $\varphi = \varphi_*$. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют $\mathrm{Bi} = 0$; 0,1; 1.

Из графика следует, что с увеличением τ_1 при $\tau_1 \leqslant 40$ *сек* отношение изменяется от нуля до единицы. При этом с возрастанием Bi отношение $\frac{\varphi_*}{\varphi_0}$ приближается к единице быстрее. Для $\tau_1 \geqslant 40$ *сек* $\varphi_0 \simeq \varphi_*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Григолюк Э. И., Подстригач Я. С.— В кн.: Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок (Днепропетровск, 1969). «Наука», М., 1970.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, М., 1961.
3. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.— ПМТФ, 1968, 4.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.
5. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
6. Подстригач Я. С., Колодий Б. И.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 10. «Наукова думка», К., 1970.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.