

**Термоупругое пространство.** Полагая в формулах (22) — (25)  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , получаем решения задачи обобщенной термоупругости для бесконечной среды, находящейся под воздействием периодических во времени сосредоточенных силовых факторов.

Результаты анализа формул (24) для термоупругого случая показывают, что слагаемые  $e^{-b_3-i(a_3-\omega\tau)}$  и  $e^{-b_4-i(a_4-\omega\tau)}$  соответствуют модифицированным упругой и тепловой сферическим волнам, распространяющимся от центра соответственно со скоростями

$$v_1 = \frac{\omega}{a_3}, \quad v_t = \frac{\omega}{a_4}. \quad (26)$$

Амплитуды этих волн затухают с удалением от точки действия центра расширения как  $\frac{e^{-b_i r}}{r}$ , где  $i = 1, 2$ .

На рисунке показана зависимость безразмерных упругих фазовой  $v = \frac{v_1}{c_1}$  (штриховая кривая) и групповой  $v_g$  (сплошная кривая) скоростей от безразмерной частоты  $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega^*}$ , где  $\omega^*$  — характеристическая частота материала [1, 5]. Подсчеты проводились для алюминия с параметрами  $\nu = 0,3$ ,  $\tau_0 = 10^{-12}$  сек,  $s = \frac{c_1}{c_t} = 0,465$  и коэффициентом сопряжения  $\gamma = 0,0356$ .

Кривые  $s = 0$  соответствуют уравнению теплопроводности параболического типа, а кривые  $s = 0,465$  — гиперболического. Как видно из рисунка, заметное влияние конечной скорости тепла на волновые процессы в твердом теле сказывается для безразмерных частот  $\tilde{\omega} > 1$ . Причем влияние ускорения  $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \operatorname{div} \vec{u}$  на волновые характеристики мало при данных параметрах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
2. Коваленко А. Д., Карнаухова В. Г., Тюття В. И. — Прикладная механика, 1968, 4, 9.
3. Подстригач Я. С. — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1960, 4.
4. Підстригач Я. С., Бурак Я. Й. — Прикладна механіка, 1962, 8, 3.
5. Попов Е. Б. — ПММ, 1967, 31, 2.
6. Швец Р. Н. — Прикладная механика, 1965, 1, 3.
7. Lord H. W., Shulman V. A. — J. Mech. Phys. Solid., 1967, 15, 5.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

## ТЕРМОУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЭНЕРГИИ ВОКРУГ ВЕРШИНЫ СДВИГОВОЙ ТРЕЩИНЫ

Н. М. Власов, В. С. Колесов, И. И. Федик

Упругая деформация реального кристалла сопровождается тепловыми эффектами. При сжатии (растяжении) происходит выделение (поглощение) тепла [4]. Указанные процессы играют существенную роль при тепловой релаксации в твердых телах.

Температурная релаксация, обусловленная теплопроводностью, изучалась Зинером [2], который рассматривал изгибные колебания пластинки. В процессе колебаний тепловой поток идет от сжатой области к растянутой, что приводит к рассеянию механической энергии колебаний. Зинер указал

еще один механизм тепловой релаксации в поликристаллах. Плоскости симметрии свойств (механических, тепловых и т. д.) отдельных кристаллов поликристалла расположены хаотически. При одной и той же деформации возникают локальные тепловые потоки вследствие теплообмена между отдельными кристаллами, что также вызывает рассеяние энергии. Более подробно этот вопрос изучался в работах [1, 6].

Работа [5] посвящена исследованию термоупругого рассеяния механической энергии в ограниченном твердом теле, через поверхность которого осуществляется теплопередача в окружающую среду.

В данной работе рассматривается термоупругое рассеяние энергии вокруг вершины неподвижной сдвиговой трещины при периодическом изменении приложенной нагрузки.

Пусть трещина длиной  $2l$  находится под действием приложенного скальвающего напряжения  $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$ . У краев трещины возникают поля сжимающих (растягивающих) напряжений, являющихся источником выделения (поглощения) тепла. Возникающая при этом температурная деформация не совпадает по фазе с приложенным напряжением, что вызывает диссипацию механической энергии. Вокруг вершины трещины существует цилиндрическая область радиуса  $r_0$ , где напряжения, создаваемые трещиной, почти полностью релаксированы. Это зона пластически деформированного материала вокруг края трещины.

Процесс теплопроводности в окрестности вершины трещины описывается уравнением [3]

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T - \frac{\alpha T_0 (3\lambda + 2\mu)}{k} \varepsilon_{ii}, \quad (1)$$

где  $a^2$  — коэффициент температуропроводности;  $k$  — коэффициент теплопроводности;  $T_0$  — температура тела в ненапряженном состоянии;  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Ляме для изотермической деформации;  $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ ;  $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ ;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\varepsilon_{ii}$  — шпур тензора деформации вокруг края сдвиговой трещины, определяемый по формуле

$$\varepsilon_{ii} = \frac{2(1 + \nu) \sigma_0 \sqrt{l} \sin \omega t \sin \frac{\theta}{2}}{3(3\lambda + 2\mu)};$$

$\sigma_0$  — амплитуда приложенного напряжения;  $\omega$  — круговая частота;  $r$ ,  $\theta$  — полярные координаты ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ).

Рассмотрим установившийся периодический режим, т. е. влияние начальных условий практически не сказывается на распределение температуры в момент наблюдения. Граничные условия для уравнения (1) запишутся следующим образом:  $T(\infty) = T_0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$  при  $r = r_0$ . Это означает, что на бесконечности поддерживается постоянная температура, равная температуре тела в ненапряженном состоянии, а на границе между упругой и пластической областями происходит мгновенное перераспределение температуры между участками сжатия и растяжения.

Проделав соответствующие преобразования, получим распределение температуры вокруг вершины сдвиговой трещины:

$$T - T_0 = \frac{A \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}} \frac{e^{-(\rho-1)} \sin \left[ \omega t - (\rho-1)\beta - \arctg \frac{\beta}{\frac{1}{2} + \beta} \right]}{\left( \frac{1}{4} + \beta + 2\beta^2 \right)^{1/2}},$$

$$A = \frac{\alpha a^2 T_0 (1 + \nu) \sigma_0 \sqrt{l}}{3k}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} r_0, \quad \rho = \frac{r}{r_0},$$

где  $\alpha$  — линейный коэффициент теплового расширения.

Неоднородное поле температуры создает температурную деформацию, которая вызывает диссипацию энергии. Если частота колебаний мала, то процесс носит изотермический характер и рассеяние энергии будет незначительным. При большой частоте колебаний процесс происходит почти адиабатически и потери энергии вследствие теплопроводности также малы. Наибольшее рассеяние энергии ожидается при некоторых промежуточных частотах, когда процесс не носит ни изотермического, ни адиабатического характера.

Определим потери энергии за цикл для объемных компонент тензора температурной деформации в единице объема образца:

$$\Delta\omega = L \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r_0}^R \sigma_{ii} (\varepsilon_{ii}^T)' r dr d\theta \right\} dt.$$

Здесь  $L$  — средняя длина краев трещины в единице объема,  $\varepsilon_{ii}^T$  — шпур тензора температурной деформации, определяемый по формуле

$$\varepsilon_{ii}^T = 3\alpha (T - T_0).$$

Нижний предел интегрирования по  $r$  принимаем равным радиусу зоны пластически деформированного материала вокруг вершины трещины. Верхний предел интегрирования по  $r$  принимаем равным половине длины трещины.

Упругая деформация, создаваемая самой трещиной, непосредственно следует за изменением приложенного напряжения и поэтому не дает вклада во внутреннее трение, которое определяется обычным образом:

$$Q^{-1} = \frac{\Delta\omega}{2\pi\omega},$$

где  $\omega$  — энергия колебаний единицы объема образца, т. е.

$$\omega = \frac{\sigma_0^2}{2\mu}.$$

Окончательное выражение для внутреннего трения получаем в виде

$$Q^{-1} = \frac{\sin \left[ \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\frac{1}{2} + \beta} + \frac{\pi}{4} \right] - e^{-\left(\frac{R}{r_0} - 1\right)\beta} \sin \left[ \left(\frac{R}{r_0} - 1\right)\beta + \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\frac{1}{2} + \beta} + \frac{\pi}{4} \right]}{\beta \left( \frac{1}{4} + \beta + 2\beta^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$B = \frac{\sqrt{2} \pi \alpha^2 (1 + \nu)^2 \mu a T_0 L r_0}{3k}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha^2}} r_0.$$

Полученные значения  $Q_{\max}^{-1}$  могут быть определены экспериментально, тем самым метод внутреннего трения можно использовать для анализа нарушений сплошности в твердых телах. Из-за отсутствия точных значений таких характеристик материала, как длина краев трещин в единице объема и т. п., численные величины релаксационных пиков носят условный характер.

Приведенные зависимости могут быть использованы для теоретического анализа рассеяния энергии на нарушениях сплошности в твердых телах.

При малых частотах ( $\beta \ll 1$ )

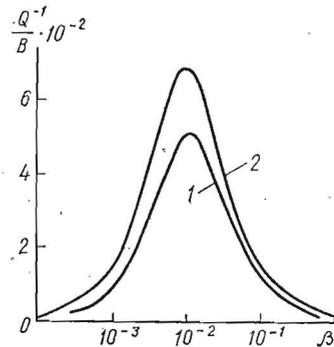
$$Q^{-1} = B \frac{\sqrt{2} - 2e^{-\left(\frac{R}{r_0} - 1\right)\beta} \sin \left[ \left(\frac{R}{r_0} - 1\right)\beta + \frac{\pi}{4} \right]}{\beta},$$

а при больших ( $\beta \gg 1$ ) —

$$Q^{-1} = B \frac{\sqrt{2} - 2e^{-\left(\frac{R}{r_0} - 1\right)\beta} \cos\left[\left(\frac{R}{r_0} - 1\right)\beta + \frac{\pi}{4}\right]}{2\sqrt{2}\beta^2}.$$

Зависимость приведенного внутреннего трения от частоты для различных значений  $\frac{R}{r_0} - 1$  показана на рисунке ( $1 - \frac{R}{r_0} - 1 = 8 \cdot 10^3$ ,  $2 - \frac{R}{r_0} - 1 = 10^3$ ).

3. В качестве примера микротрещин рассмотрим диски вакансий. Среднюю длину краев вакансионных дисков в единице объема материала можно рассматривать как плотность призматических дислокаций. Пусть  $L = 10^9 \frac{1}{\text{см}^2}$ ,  $l = 10^{-4}$  см,  $r_0 = 10^{-7}$  см. Оценим величину максимума внутреннего трения для различных материалов при  $\left(\frac{R}{r_0} - 1\right) = 10^{+3}$  для  $T_0 = 300$  °К:



$$\alpha\text{-Fe} \left( \alpha = 12,3 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}; \nu = 0,28; \mu = 8,2 \cdot 10^{11} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \right);$$

$$a^2 = 0,22 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}; k = 0,78 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} \left) Q_{\text{max}}^{-1} = 1,74 \cdot 10^{-2};$$

$$\text{Mo} \left( \alpha = 5,1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}; \nu = 0,31; \mu = 12,8 \cdot 10^{11} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \right);$$

$$a^2 = 0,51 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}; k = 1,37 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} \left) Q_{\text{max}}^{-1} = 0,65 \cdot 10^{-2}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Даринский Б. М., Фокин А. Г. — В кн.: Внутреннее трение в металлах и сплавах. «Наука», М., 1966.
2. Зинер К. — В кн.: Упругость и неупругость металлов. ИЛ, М., 1954.
3. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
4. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. «Мир», М., 1969.
5. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. — В кн.: Внутреннее трение в металлах и сплавах. «Наука», М., 1966.
6. Шермергор Т. Д., Даринский Б. М., Фокин А. Г. — В кн.: Релаксационные явления в твердых телах. «Металлургия», М., 1968.

Поступила в редколлегию  
в декабре 1973 г.

#### ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ РЕЖИМЫ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ

Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич

Температурные поля и напряжения, возникающие в процессе индукционной термообработки, в зависимости от схемы индукционного нагрева, частоты и амплитуды источников внешнего электромагнитного поля, условий теплообмена с внешней средой, условий закрепления элементов конструкций и т. п., могут изменяться в широких пределах и превышать допустимые. Поэтому возникает необходимость постановки и решения задачи оптимиза-