ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Ф. В. Семерак

Рассмотрим свободную от внешней нагрузки, нагреваемую линейным источником тепла, бесконечную пластинку, постоянной толщины 2δ, имеющую цилиндрическую анизотропию. Мощность источника тепла изменяется в начальный момент времени τ на некоторую величину $q/2\delta$, оставаясь далее постоянной. Будем считать, что температура T, скорость нагрева $\frac{\partial T}{\partial \tau}$, перемещение u и скорость $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ в начальный момент времени равны нулю, а на бесконечности температура и ее производная по координате r исчезают.

Для определения нестационарного обобщенного плоского температурного поля данной пластинки имеем уравнение теплопроводности гиперболического типа [1]

$$\Delta T - \varkappa^2 l T = \frac{1}{a_r}\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{1}{c_q^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} - Q\frac{\delta(r)}{r}\left[S_+(\tau) + \tau_r \delta(\tau)\right], \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$; $\varkappa^2 = \frac{\alpha}{\lambda_r \delta}$; $l = 1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau}$; $Q = \frac{q}{4\pi\lambda_r\delta}$;

$c_q = \sqrt{\frac{a_r}{\tau_r}}$ — скорость распространения тепла; $S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau \leqslant 0 \end{cases}$ — асимметричная единичная функция; $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака; α — коэффициент теплоотдачи с поверхностей $z = \pm\delta$; λ_r, a_r — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности в направлении r; τ_r — время релаксации теплового потока.

Решая уравнение (1) при указанных краевых условиях методом интегральных преобразований Ханкеля по r и Лапласа по τ, получаем искомое температурное поле в пластинке:

$$\theta = S_-(f - Mp)\left[\exp\left(-\frac{f}{2M^2}\right)\frac{\operatorname{ch}[w(p, f)]}{\sqrt{f^2 - M^2p^2}} + \right.$$

$$\left. + \int_{Mp}^{f} \exp\left(-\frac{\zeta}{2M^2}\right)\frac{\operatorname{ch}[w(p, \zeta)]}{\sqrt{\zeta^2 - M^2p^2}}\, d\zeta\right], \tag{2}$$

где

$$\theta = \frac{T}{Q}; \quad M = \frac{c_1}{c_q}; \quad f = \frac{c_1^2\tau}{a_r^*}; \quad p = \frac{c_1 r}{a_r^*}; \quad a_r^* = \frac{a_r}{1 + a_r\tau_r\varkappa^2};$$

$$S_-(f - Mp) = \begin{cases} 1, & f \geqslant Mp, \\ 0, & f < Mp, \end{cases} \quad b = \frac{2a_r^*\varkappa}{c_1};$$

$$w(p, x) = \frac{1}{2M^2}\left[(1 - b^2M^2)(x^2 - M^2p^2)\right]^{\frac{1}{2}};$$

$c_1 = \left[\frac{E_r}{\rho(1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r})}\right]^{\frac{1}{2}}$ — скорость распространения упругой волны в пластинке; E_r — модуль Юнга в радиальном направлении; $\nu_{\varphi r}$, $\nu_{r\varphi}$ — коэффициенты Пуассона; ρ — плотность.

В случае осесимметричной задачи термоупругости для определения вызываемых этим температурным полем динамических температурных напряжений воспользуемся формулами [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= E_*\left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu_{r\varphi}}{r}\right)u - \alpha_t^* T\right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= E_*\left[\left(\nu_{r\varphi}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k^2}{r}\right)u - \alpha_*^t k^2 T\right], \end{aligned} \tag{3}$$

в которых u удовлетворяет уравнению

$$\Delta u - k^2 \frac{u}{r^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \psi(r, \tau). \tag{4}$$

Здесь

$$E_* = \frac{E_r}{1 - \nu_{r\varphi}\nu_{\varphi r}}, \quad k^2 = \frac{E_\varphi}{E_r}, \quad \alpha_t^* = \alpha_r^t + \nu_{r\varphi}\alpha_\varphi^t,$$

$$\alpha_*^t = \alpha_\varphi^t + \nu_{\varphi r}\alpha_r^t, \quad \psi(r, \tau) = \alpha_t^* \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_t^0 \frac{T}{r}, \quad \alpha_t^0 = \alpha_t^* - k^2\alpha_*^t,$$

E_φ — модуль Юнга в тангенциальном направлении; α_r, α_φ — температурные коэффициенты расширения в радиальном и тангенциальном направлениях.

Применяя к уравнению (4) преобразование Лапласа по τ, получаем для определения изображения радиального перемещения такое уравнение:

$$\frac{d^2\bar{u}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{u}}{dr} - \left(\frac{k^2}{r^2} + \frac{s^2}{c_1^2}\right)\bar{u} = \bar{\psi}(r, s), \tag{5}$$

где

$$\bar{\psi}(r, s) = 2Ql\left[\frac{\alpha_t^0}{r} K_0(r\gamma_s) - \alpha_t^*\gamma_s K_1(r\gamma_s)\right],$$

$$\gamma_s = \sqrt{\frac{s^2}{c_q^2} + \frac{s}{a^*} + \varkappa^2}.$$

Решение уравнения (5) с учетом обращения в нуль в начале координат перемещения и на бесконечности температурных напряжений (3) (случай обобщенного плоского термонапряженного состояния) для $k \geqslant 1$ примет вид

$$\bar{u} = I_k(rq_s) M_s - K_k(rq_s) N_s, \tag{6}$$

где

$$M_s = \int_\infty^r r\bar{\psi} K_k(rq_s)\,dr, \quad N_s = \int_0^r r\bar{\psi} I_k(rq_s)\,dr, \quad q_s = \frac{s}{c_1}.$$

Подставляя теперь формулу (6) в преобразованные по Лапласу соотношения (3), для определения температурных напряжений в случае обобщенного плоского термонапряженного состояния находим

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= E_*\{[q_s K_{k+1}(rq_s) - k_r K_k(rq_s)] N_s + [q_s I_{k+1}(rq_s) + \\ &\quad + k_r I_k(rq_s)] M_s - \alpha_t^* \bar{T}\}, \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} &= E_*\{[\nu_{r\varphi} q_s K_{k+1}(rq_s) - kk_r K_k(rq_r)] N_s + \\ &\quad + [\nu_{r\varphi} q_s I_{k+1}(rq_s) + kk_r I_k(rq_s)] M_s - \alpha_*^t k^2 \bar{T}\}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$k_r = \frac{k - \nu_{r\varphi}}{r}, \quad \bar{T} = \frac{1}{s} lQK_0(r\gamma_s).$$

Переходя в выражениях (7) от изображений к оригиналам, используя при этом данные работы [2] и теорему о свертке, приходим к таким интегральным уравнениям Вольтерра первого рода для определения динамических температурных напряжений в пластинке:

$$\begin{aligned} &\int_0^t \sigma_r(p, \zeta)(f - \zeta)^{k-1} d\zeta = (k-1)! \quad l\Big\{2\int_0^p\int_0^f\int_0^\eta [\alpha_k^*\varphi_0(\xi, \eta - \zeta) - \\ &- \xi\varphi_1(\xi, \eta - \zeta)]\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\varphi_2(\xi, k+1, \zeta)\varphi_3(\xi, k, f - \eta) - \right. \\ &\left. - k_p \frac{\partial}{\partial\zeta}\varphi_2(\xi, k, \zeta)\varphi_3(\xi, k, f - \eta)\right] d\zeta d\eta d\xi + 2\int_\infty^p\int_0^f\int_0^\eta [\alpha_k^*\varphi_0(\xi, \eta - \zeta) - \end{aligned}$$

$$-\xi\varphi_1(\xi,\eta-\zeta)]\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\varphi_2(\xi,k,\zeta)\varphi_3(p,k+1,f-\eta)+\right.$$

$$\left.+k_p\frac{\partial}{\partial\zeta}\varphi_2(\xi,k,\zeta)\varphi_3(p,k,f-\eta)\right]d\zeta d\eta d\xi-\varphi_0(p,f)\Big\},$$

$$\int_0^f\sigma_\varphi(p,\zeta)(f-\zeta)^{k-1}d\zeta=(k-1)!\ l\Big\{2\int_0^p\int_0^f\int_0^\eta[\alpha_k^*\varphi_0(\xi,\eta-\zeta)-\xi\varphi_1(\xi,\eta-$$

$$-\zeta)]\left[\nu_{r\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\varphi_2(\xi,k+1,\zeta)\varphi_3(\xi,k,f-\eta)-\right.$$

$$\left.-kk_p\frac{\partial}{\partial\zeta}\varphi_2(\xi,k,\zeta)\varphi_3(\xi,k,f-\eta)\right]d\zeta d\eta d\xi+ \qquad (8)$$

$$+2\int_\infty^p\int_0^f\int_0^\eta[\alpha_k^*\varphi_0(\xi,\eta-\zeta)-\xi\varphi_1(\xi,\eta-\zeta)]\times$$

$$\times\left[\nu_{r\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\varphi_2(\xi,k,\zeta)\varphi_3(p,k+1,f-\eta)+\right.$$

$$\left.+kk_p\frac{\partial}{\partial\zeta}\varphi_2(\xi,k,\zeta)\varphi_3(p,k,f-\eta)\right]d\zeta d\eta d\xi-(1-\alpha_k^*)\varphi_0(p,f)\Big\},$$

где

$$\varphi_0(p,f)=S_-(f-Mp)\int_{Mp}^f(f^2-M^2p^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{f}{2M^2}\right)\operatorname{ch}[w(p,f)]\,df,$$

$$\varphi_1(p,f)=Mp\left[\frac{\partial}{\partial f}\psi_0(p,f)+M^{-2}\psi_0(p,f)+(2M)^{-2}b^2\int_0^f\psi_0(p,\zeta)\,d\zeta\right],$$

$$\varphi_2(p,k,f)=(f^2-p^2)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\left[k\operatorname{Arch}\left(\frac{f}{p}\right)\right]S_-(f-p),$$

$$\varphi_3(p,k,f)=\frac{2^{-k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+0{,}5)}f^{-k}[(2p-f)f]^{k-\frac{1}{2}}S_-(2p-f),$$

$$\psi_0(p,f)=2M^2(1-b^2M^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{f}{2M^2}\right)\operatorname{sh}[w(p,f)]S_-(f-Mp),$$

$$\alpha_k^*=1-k^2\frac{\alpha_*^t}{\alpha_t^*},\quad \sigma_i=\frac{\sigma_{ii}}{\alpha_t^*E_*Q}\qquad(i=r,\varphi),\quad k_p=\frac{k-\nu_{r\varphi}}{p}.$$

Таким образом, решение задачи термоупругости сведено к решению интегральных уравнений Вольтерра первого рода, которые для конкретного значения k решаются численно.

Если порядок модифицированных функций Бесселя, входящих в выражения (7), равен целому числу с половиной, существует возможность перехода к оригиналам с помощью данных работы [2] и теоремы о свертке для преобразования Лапласа. В результате выражения для динамических температурных напряжений можно получить в явном виде.

Для $k=\frac{3}{2}$ имеем

$$\sigma_r=\int_0^p l\Big\{\left(\frac{\partial}{\partial f}+R\right)[F(p,\zeta_1)+F(p,\zeta_2)]-\frac{1}{\zeta}[F(p,\zeta_1)-F(p,\zeta_2)]-$$

$$-\frac{R}{\zeta}\int_0^f[F(p,\zeta_1)-F(p,\zeta_2)]\,df+\frac{1}{p}\int_0^f[F(p,\zeta_1)+F(p,\zeta_2)]\,df-$$

$$-\frac{R}{p\zeta}\int_0^f(f-\eta)[F(p,\zeta_1-\eta)-F(p,\zeta_2-\eta)]\,d\eta\Big\}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}-$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\int\limits_{\infty}^{p} l\left\{\left(\frac{\partial}{\partial f}+\frac{1}{\zeta}\right)[F(p,\zeta_2)-F(p,\zeta_3)]+R[F(p,\zeta_2)+F(p,\zeta_3)]+\right.\\
&+\frac{R}{\zeta}\int\limits_0^f [F(p,\zeta_2)+F(p,\zeta_3)]\,df+\frac{R}{\zeta}\int\limits_0^f [F(p,\zeta_2)-F(p,\zeta_3)]\,df+\\
&\left.+\frac{R}{p\zeta}\int\limits_0^f (f-\eta)[F(p,\zeta_2-\eta)-F(p,\zeta_3-\eta)]\,d\eta\right\}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}-l\varphi_0(p,f),\\
&\sigma_\varphi=\int\limits_0^p l\left\{\left(\frac{\partial}{\partial f}+R_1\right)[F(p,\zeta_1)+F(p,\zeta_2)]-\frac{1}{\zeta}[F(p,\zeta_1)-F(p,\zeta_2)]-\right.\\
&-\frac{R_1}{\zeta}\int\limits_0^f [F(p,\zeta_1)-F(p,\zeta_2)]\,df+\frac{1}{p}\int\limits_0^f [F(p,\zeta_1)+F(p,\zeta_2)]\,df-\\
&\left.-\frac{R_1}{p\zeta}\int\limits_0^f (f-\eta)[F(p,\zeta_1-\eta)F(p,\zeta_2-\eta)]\,d\eta\right\}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}-\\
&-\int\limits_{\infty}^{p} l\left\{\left(\frac{\partial}{\partial f}+\frac{1}{\zeta}\right)[F(p,\zeta_2)-F(p,\zeta_3)]+R_1[F(p,\zeta_2)+F(p,\zeta_3)]+\right.\\
&+\frac{R_1}{\zeta}\int\limits_0^f [F(p,\zeta_2)+F(p,\zeta_3)]df+\frac{R_1}{p}\int\limits_0^f [F(p,\zeta_2)-F(p,\zeta_3)]\,df+\\
&\left.+\frac{R_1}{p\zeta}\int\limits_0^f (f-\eta)[F(p,\zeta_2-\eta)-F(p,\zeta_3-\eta)]\,d\eta\right\}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}+\\
&+l(\alpha_k^*-1)\,\varphi_0(p,f),
\end{aligned}
\right\}\quad(9)
$$

где

$$F(p,\zeta)=\alpha_k^*\varphi_0(p,\zeta)-\varphi_1(p,\zeta),\quad R=\frac{1}{p}(3-k_pp),$$

$$R_1=\frac{1}{p}(3\nu_{r\varphi}-kk_pp),\quad \zeta_1=f-p+\zeta,\quad \zeta_2=f-p-\zeta,\quad \zeta_3=f+p-\zeta.$$

Для изотропной пластинки ($E_r=E_\varphi=E,\ \alpha_t^*=\alpha_*^t=\alpha_t,\ \nu_{r\varphi}=\nu_{\varphi r}=\nu$) выражения динамических температурных напряжений имеют вид

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_r=S_-(f-p)[F_1(p,f)+F_2(p,f)]-S_-(f-Mp)[F_3(p,f)-F_4(p,f)],\\
&\sigma_\varphi=S_-(f-p)[-F_1(p,f)+\nu F_2(p,f)]-S_-(f-Mp)[F_3(p,f)+\\
&+F_4(p,f)+F_s(p,f)],
\end{aligned}
\right\}\quad(10)
$$

где

$$\sigma_i=\frac{(1-\nu)\,\sigma_{it}}{\alpha_tEQ}\qquad (i=r,\varphi),\quad d=\sqrt{1+b^2(1-M^2)},$$

$$
\begin{aligned}
&F_1(p,f)=\frac{1-\nu}{2dp^2(1-M^2)}\left\{(1+d)\left[M^2\sqrt{f^2-p^2}+\right.\right.\\
&\left.+\exp\left(\frac{1+d}{2(1-M^2)}f\right)\int\limits_0^f\exp\left(-\frac{1+d}{2(1-M^2)}\zeta\right)(\zeta^2-p^2)^{\frac{1}{2}}d\zeta\right]-\\
&-(1-d)\left[M^2\sqrt{f^2-p^2}+\exp\left(\frac{1-d}{2(1-M^2)}f\right)\int\limits_p^f\exp\left(-\frac{1-d}{2(1-M^2)}\zeta\right)\times\right.\\
&\left.\left.\times(\zeta^2-p^2)^{\frac{1}{2}}d\zeta\right]\right\},
\end{aligned}
$$

$$F_2(p,f)=\frac{1}{2d(1-M^2)}\left\{(1+d)\left[M^2(f^2-p^2)^{-\frac{1}{2}}+\right.\right.$$

$$\left.+\exp\left(\frac{1+d}{2(1-M^2)}f\right)\int_p^f\exp\left(-\frac{1+d}{2(1-M^2)}\zeta\right)(\zeta^2-p^2)^{-\frac{1}{2}}d\zeta\right]-$$

$$-(1-d)\left[\frac{M^2}{\sqrt{f^2-p^2}}+\exp\left(\frac{1-d}{2(1-M^2)}f\right)\int_p^f\exp\left(-\frac{1-d}{2(1-M^2)}\zeta\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times(\zeta^2-p^2)^{-\frac{1}{2}}d\zeta\right]\right\},$$

$$F_3(p,f)=\frac{1}{2d(1-M^2)}\left\{(1+d)\left[M^2\exp\left(-\frac{f}{2M^2}\right)\frac{\mathrm{ch}\,[w(p,f)]}{\sqrt{f^2-M^2p^2}}+\right.\right.$$

$$\left.+\exp\left(\frac{1+d}{2(1-M^2)}f\right)\int_{Mp}^f\exp\left(-\frac{1+dM^2}{2(1-M^2)M^2}\zeta\right)\frac{\mathrm{ch}\,[w(p,\zeta)]}{\sqrt{\zeta^2-M^2p^2}}d\zeta\right]-$$

$$-(1-d)\left[M^2\exp\left(-\frac{f}{2M^2}\right)\frac{\mathrm{ch}\,[w(p,f)]}{\sqrt{f^2-M^2p^2}}+\right.$$

$$\left.\left.+\exp\left(\frac{1-d}{2(1-M^2)}f\right)\int_{Mp}^f\exp\left(-\frac{1-dM^2}{2M^2(1-M^2)}\zeta\right)\frac{\mathrm{ch}\,[w(p,\zeta)]}{\sqrt{\zeta^2-M^2p^2}}d\zeta\right]\right\},$$

$$F_4(p,f)=\frac{2(1-\nu)}{p^2(1-M^2)}\left\{(1-M^2)\left[M^2\exp\left(-\frac{f}{2M^2}\right)\frac{\mathrm{sh}\,[w(p,f)]}{\sqrt{1-b^2M^2}}+\right.\right.$$

$$\left.+\int_{Mp}^f\exp\left(-\frac{\zeta}{2M^2}\right)\frac{\mathrm{sh}\,[w(p,\zeta)]}{\sqrt{1-b^2M^2}}d\zeta\right]-$$

$$-\frac{2(1+d)+b^2(1-M^2)}{2d(1+d)}\left[M^2\exp\left(-\frac{f}{2M^2}\right)\frac{\mathrm{sh}\,[w(p,f)]}{\sqrt{1-b^2M^2}}+\right.$$

$$\left.+\exp\left(\frac{1+d}{2(1-M^2)}f\right)\int_{Mp}^f\exp\left(-\frac{1+dM^2}{2M^2(1-M^2)}\zeta\right)\frac{\mathrm{sh}\,[w(p,\zeta)]}{\sqrt{1-b^2M^2}}d\zeta\right]+$$

$$+\frac{2(1-d)+b^2(1-M^2)}{2d(1-d)}\left[M^2\exp\left(-\frac{f}{2M^2}\right)\frac{\mathrm{sh}\,[w(p,f)]}{\sqrt{1-b^2M^2}}+\right.$$

$$\left.\left.+\exp\left(\frac{1-d}{2(1-M^2)}f\right)\int_{Mp}^f\exp\left(-\frac{1-dM^2}{2M^2(1-M^2)}\zeta\right)\frac{\mathrm{sh}\,[w(p,\zeta)]}{\sqrt{1-b^2M^2}}d\zeta\right]\right\},$$

$$F_5(p,f)=\frac{1-\nu}{1-M^2}\left\{(1-M^2)\left[M^2\exp\left(-\frac{f}{2M^2}\right)\frac{\mathrm{ch}\,[w(p,f)]}{\sqrt{f^2-M^2p^2}}+\right.\right.$$

$$\left.+\int_{Mp}^f\exp\left(-\frac{\zeta}{2M^2}\right)\frac{\mathrm{ch}\,[w(p,\zeta)]}{\sqrt{\zeta^2-M^2p^2}}d\zeta\right]-$$

$$-\frac{2(1+d)+b^2(1-M^2)}{2d(1+d)}\left[M^2\exp-\left(\frac{f}{2M^2}\right)\frac{\mathrm{ch}\,[w(p,f)]}{\sqrt{f^2-M^2p^2}}+\right.$$

$$\left.+\exp\left(\frac{1+d}{2(1-M^2)}f\right)\int_{Mp}^f\exp\left(-\frac{1+dM^2}{2M^2(1-M^2)}\zeta\right)\frac{\mathrm{ch}\,[w(p,\zeta)]}{\sqrt{\zeta^2-M^2p^2}}d\zeta\right]+$$

$$+\frac{2(1-d)+b^2(1-M^2)}{2d(1-d)}\left[M^2\exp\left(-\frac{f}{2M^2}\right)\frac{\mathrm{ch}\,[w(p,f)]}{\sqrt{f^2-M^2p^2}}+\right.$$

$$\left.\left.+\exp\left(\frac{1-d}{2(1-M^2)}f\right)\int_{Mp}^f\exp\left(-\frac{1-dM^2}{2M^2(1-M^2)}\zeta\right)\frac{\mathrm{ch}\,[w(p,\zeta)]}{\sqrt{\zeta^2-M^2p^2}}d\zeta\right]\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. «Высшая школа», М., 1965.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

УСЛОВИЯ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ РАЗНОРОДНЫХ ТЕЛ

Ю. М. Коляно, Е. П. Хомякевич

Пусть два тела соединены между собой тонким промежуточным слоем. Тепловые характеристики соединяющихся тел и слоя различны. Теплообмен с окружающей средой осуществляется по закону Ньютона, а между телами и слоем осуществляется идеальный тепловой контакт.

В этом случае для определения температурного поля в системе имеем уравнения теплопроводности [2]

$$\lambda_i \Delta t_i = c_i l_i \frac{\partial t_i}{\partial \tau} - l_i w_i, \quad i = 0, 1, 2, \tag{1}$$

обобщенные условия идеального теплового контакта

$$t_0 = t_1, \; \frac{\lambda_0}{\tau_r^{(0)}} \int_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(0)}}} \frac{\partial t_0}{\partial n_1} d\zeta = \frac{\lambda_1}{\tau_r^{(1)}} \int_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(1)}}} \frac{t_1}{\partial n_1} d\zeta \text{ на } S_1,$$

$$t_0 = t_2, \; \frac{\lambda_0}{\tau_r^{(0)}} \int e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(0)}}} \frac{\partial t_0}{\partial n_2} d\zeta = \frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}} \int_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(2)}}} \frac{\partial t_2}{\partial n_2} d\zeta \text{ на } S_2, \tag{2}$$

обобщенные граничные условия на поверхности S_i'

$$\frac{\partial t_i}{\partial n_i'} + \frac{\alpha_i}{\lambda_i} l_i (t_i - t_c) = 0 \tag{3}$$

и начальные условия

$$t_i|_{\tau=0} = t_0^{(0)}, \quad \dot{t}_i|_{\tau=0} = 0. \tag{4}$$

Здесь t_i — температуры промежуточного слоя, первого и второго тел; λ_i, c_i — соответственно их теплопроводности и теплоемкости; α_i — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей S_i' (наружные части поверхностей, ограничивающих промежуточный слой, первое и второе тела); $\bar{n}_1 = -\bar{n}_2 = \bar{n}$, $\bar{n}$ — нормаль к поверхности S_0, $\bar{n}_1$ — нормаль к поверхности S_1, $\bar{n}_2$ — нормаль к поверхности S_2; S_0 — срединная поверхность промежуточного слоя, S_1, S_2 — поверхности контакта первого и второго тел со слоем; w_i — плотность источников тепла; $l_i = 1 + \tau_r^{(i)} \frac{\partial}{\partial \tau}$; $\tau_2^{(i)}$ — время релаксации теплового потока q_i.

Перепишем уравнение теплопроводности для слоя, отнесенного к смешанной системе координат (α, β, γ), в виде

$$\frac{\partial^2 t_0}{\partial \gamma^2} + p^2 t_0 = -\frac{l_0 w_0}{\lambda_0}, \tag{5}$$

где

$$p^2 = \Delta - \frac{c_0}{\lambda_0} l_0 \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \Delta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\right)\right].$$