

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НАГРЕВЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ ОБЛАСТЬЮ

Г. В. Пляцко, Е. Н. Новосад, В. Н. Максимович, А. А. Градыская

Рассмотрим тонкую пологую оболочку в прямоугольной системе координат (α, β) , находящуюся в неравномерном температурном поле. Уравнение напряженно-деформированного состояния оболочки можно записать в виде [1 — 3]

$$\Delta\Delta\Phi - i\gamma^2 \left(k_2' \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + k_1' \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \right) \Phi = -\alpha_t \gamma_0 \Delta (\nu_0 T_2 + iT_1), \quad (1)$$

где

$$k_2' = D_1 k_2, \quad k_1' = D_1 k_1, \quad \gamma^2 = \frac{\gamma_0}{D_1}, \quad h\gamma_0 = \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad \gamma_0 \nu_0 h = 1 + \nu,$$

$$\gamma_0 E_0 = 2Eh, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}, \quad T_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t dz, \quad T_2 = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z t dz,$$

α_t — коэффициент линейного расширения, h — полутолщина оболочки, E — модуль упругости, Φ — комплексная функция, D_1 — геометрическая характеристика оболочки, например, для сферической оболочки $D_1 = R$, k_1 — кривизна оболочки в направлении оси α , k_2 — в направлении оси β . Усилия и моменты через функцию Φ в нашей системе координат выражаются формулами

$$\begin{aligned} \frac{M_\alpha + M_\beta}{D(1+\nu)} - i \frac{N_\alpha + N_\beta}{E_0} &= -\Delta\Phi - 2 \frac{\alpha_t}{h} T_2, \\ \frac{M_\alpha - M_\beta}{D(1-\nu)} + i \frac{N_\alpha - N_\beta}{E_0} &= -\Delta\Phi - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\beta^2} = \Delta\Phi - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\alpha^2}, \\ \frac{M_{\alpha\beta}}{D(1-\nu)} + i \frac{S_{\alpha\beta}}{E_0} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial\alpha\partial\beta}, \quad D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть начало координат совпадает с источником тепла, а ось $O\alpha$ направлена по направлению движения, тогда уравнение для определения температуры при $T_2 = 0$ в квазистационарном случае запишется [2, 4] так:

$$\Delta_1 T - \chi^2 T + \frac{v}{a} \frac{\partial T}{\partial x_1} = -A_0 \delta(x_1, y_1). \quad (3)$$

Здесь x_1, y_1 те же, что и (α, β) ; $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}$, $\chi = \frac{\alpha^*}{\lambda^* h}$, $a = \frac{\lambda^*}{c^* \gamma}$; c^* — удельная теплоемкость; γ — удельный вес; λ^* — коэффициент теплопроводности; α^* — коэффициент теплоотдачи; v — скорость движения источника; A_0 — интенсивность источника; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Перепишем уравнение (3) в виде

$$LT = -A_0 \delta(x_1, y_1), \quad (4)$$

где

$$L = \Delta_1 - \chi^2 + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Под действием оператором L на уравнение (1), принимая $T_2 = 0$:

$$L \left[\Delta_1 \Delta_1 - i\gamma^2 \left(k_2' \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + k_1' \frac{\partial^2}{\partial\beta_1^2} \right) \right] \Phi = A_0 \alpha_t \gamma_0 i \Delta_1 \delta(x_1, y_1). \quad (5)$$

Учитывая, что

$$\delta(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_1} d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y_1} d\mu, \quad (6)$$

решение уравнения (5) ищем в виде

$$\Phi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi} e^{i(\lambda x_1 + \mu y_1)} d\lambda d\mu. \quad (7)$$

Подставляя решение (7) в (5) и сравнивая левую и правую части, получаем

$$\tilde{\Phi} = A_0 \alpha_i \gamma_0 i \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} c^2 &= -\lambda^2 - \chi^2 + i \frac{v}{a} \lambda, \quad a^2 = -\lambda^2 - i\gamma_1 + \sqrt{-\gamma_1^2 + 2i\lambda^2 \gamma_1 K}, \\ b^2 &= -\lambda^2 - i\gamma_1 - \sqrt{-\gamma_1^2 + 2i\lambda^2 \gamma_1 K}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} \gamma^2 k'_1; \quad K = 1 - \frac{k'_2}{k'_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вводя функцию

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi} e^{i\mu y} d\mu, \quad (10)$$

можно определить Φ :

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi} e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (11)$$

Аналогично вычисляется функция $\Delta\Phi$:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_\Delta e^{i\lambda x} d\lambda, \quad (12)$$

где

$$\tilde{\Phi}_\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_\Delta e^{i\mu y} d\mu. \quad (13)$$

Здесь

$$\tilde{\Phi}_\Delta = A_0 \alpha_i \gamma_0 i \frac{(\lambda^2 + \mu^2)^2}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}. \quad (14)$$

Интегрируя выражения (10) и (13) методом вычетов, приходим к следующим формулам:

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{2} A_0 \alpha_i \gamma_0 e^{i\lambda y} \left[\sum_{j=1}^3 b_j e^{-a_j z} (-A_{2j} + iA_{1j}) \right], \quad (15)$$

где для $0 \leq K \leq 1$, $\lambda > 0$

$$A_{1j} = A'_j a_{j3} - A^j a_{j4}, \quad A_{2j} = A'_j a_{j4} + A^j a_{j3}, \quad b_j = \frac{1}{2(a_{j1}^2 + a_{j2}^2)},$$

$$a_{j3} = a_{j2} \cos a_{j1} - a_{j1} \sin a_{j1}, \quad a_{j4} = (-1)^{j-1} (a_{j1} \cos a_{j1} + a_{j2} \sin a_{j1})$$

$$(j = 1, 2, 3),$$

$$A'_j = L_{j\lambda} [\rho_{j\lambda} m_\lambda + (-1)^j \gamma_1 (k_{2\lambda} \rho_{j\lambda} + k_{1\lambda} q_{j\lambda})],$$

$$A^j = -L_{j\lambda} [q_{j\lambda} m_\lambda - (-1)^j \gamma_1 (k_{1\lambda} \rho_{j\lambda} - k_{2\lambda} q_{j\lambda})],$$

$$k_{j\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{d_\lambda + (-1)^j \gamma_1^2}, \quad d_\lambda = \sqrt{\gamma_1^4 + 4\lambda^2 \gamma_1^2 K^2}, \quad L_{j\lambda} = \frac{1}{2} m_\lambda n_{j\lambda},$$

$$\rho_{j\lambda} = -k_{1\lambda} + (-1)^j \chi^2, \quad q_{j\lambda} = -k_{2\lambda} - (-1)^j (\gamma_1 + e_\lambda), \quad m_\lambda = \frac{1}{k_{1\lambda}^2 + k_{2\lambda}^2},$$

$$n_{j\lambda} = \frac{1}{\rho_{j\lambda}^2 + q_{j\lambda}^2} \quad (j = 1, 2),$$

$$A'_3 = L_{3\lambda} [r_\lambda + \chi^2 (\rho_{1\lambda} \rho_{2\lambda} - q_{1\lambda} q_{2\lambda})], \quad A^3 = L_{3\lambda} [r_\lambda + \chi^2 (\rho_{1\lambda} q_{2\lambda} - \rho_{2\lambda} q_{1\lambda})],$$

$$r_\lambda = e_\lambda (\rho_{1\lambda} \rho_{2\lambda} + q_{1\lambda} q_{2\lambda}), \quad L_{3\lambda} = n_{1\lambda} \cdot n_{2\lambda}, \quad e_\lambda = \frac{v}{a} \lambda,$$

$$a_{1j} = \sqrt{\frac{1}{2} (\vartheta_1 + (-1)^j (\lambda^2 - k_{2\lambda})}, \quad a_{2j} = \sqrt{\frac{1}{2} (\vartheta_2 + (-1)^j (\lambda^2 + k_{1\lambda})},$$

$$\vartheta_j = \sqrt{[(-1)^j \lambda + k_{1\lambda}]^2 + [(-1)^j \gamma_1 + k_{2\lambda}]^2} \quad (j = 1, 2),$$

$$a_{3j} = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{l_\lambda^2 + e_\lambda^2} + (-1)^j l_\lambda}, \quad l_\lambda = \lambda^2 + \chi^2;$$

для $\lambda < 0$

$$\begin{aligned} A_{13} &= A_3^r a_{33} + A_3^r a_{34}, & A_{23} &= -A_3^r a_{34} + A_3^s a_{33}; \\ \tilde{\Phi}_\Delta &= \frac{1}{2} A_0 \alpha_t \gamma_0 e^{|\gamma_1|} \left[\sum_{j=1}^3 b_j e^{-a_j z} (-A_{\Delta 2j} + i A_{\Delta 1j}) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где для $0 \leq K \leq 1$, $\lambda > 0$

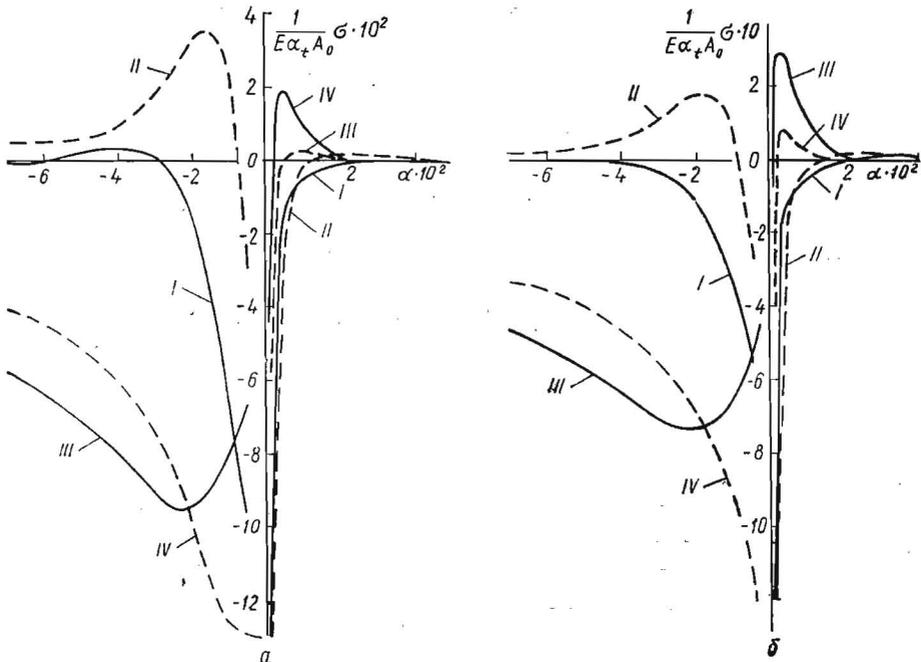
$$\begin{aligned} A_{\Delta 1j} &= A_j^{\Delta r} a_{j3} - A_j^{\Delta s} a_{j4}, & A_{\Delta 2j} &= A_j^{\Delta r} a_{j4} + A_j^{\Delta r} a_{j3} \quad (j = 1, 2, 3), \\ A_j^{\Delta r} &= -L_{j\lambda} [2\lambda^2 \rho_{j\lambda} m_\lambda^{-1} (-1)^j + 2\lambda^2 \gamma_1 (k_{2\lambda} \rho_{j\lambda} + k_{1\lambda} q_{j\lambda}) + \\ &\quad + \lambda^4 (k_{2\lambda} q_{j\lambda} - k_{1\lambda} \rho_{j\lambda} (-1)^j)], \\ A_j^{\Delta s} &= L_{j\lambda} [2\lambda^2 q_{j\lambda} m_\lambda^{-1} (-1)^j + 2\lambda^2 \gamma_1 (-1)^j (k_{2\lambda} q_{j\lambda} + k_{1\lambda} \rho_{j\lambda}) + \\ &\quad + \lambda^4 (k_{1\lambda} q_{j\lambda} + (-1)^j k_{2\lambda} \rho_{j\lambda})] \quad (j = 1, 2), \\ A_3^{\Delta r} &= L_{3\lambda} [\lambda^2 (\lambda^2 + 2\chi^2) \rho_{3\lambda} + 2\lambda^2 e_\lambda q_{3\lambda}], & A_3^{\Delta s} &= L_{3\lambda} [\lambda^2 (\lambda^2 + 2\chi^2) q_{3\lambda} + 2\lambda^2 e_\lambda \rho_{3\lambda}], \\ \rho_{3\lambda} &= q_{2\lambda} q_{1\lambda} - \rho_{2\lambda} \rho_{1\lambda}; & q_{3\lambda} &= q_{2\lambda} \rho_{1\lambda} + q_{1\lambda} \rho_{2\lambda}; \end{aligned}$$

для $\lambda < 0$

$$A_{\Delta 13} = A_3^{\Delta r} a_{33} - A_3^{\Delta s} a_{34}, \quad A_{\Delta 23} = -A_3^{\Delta r} a_{34} + A_3^{\Delta s} a_{33}.$$

Интегралы (11), (12) вычисляются численно на ЭВМ.

Как частный случай рассматривается полая сферическая оболочка радиуса R и толщиной $2h$ ($k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$) при движении точечного источника тепла по меридиану. Интегралы (11) и (12) вычислялись по формуле Симпсона с точностью до 0,001, а напряжения — по известным [2] формулам. В начале координат решение имеет особенность, поэтому при вычислении интегралов (11), (12) область интегрирования разбивается на два интервала ($-\infty, -\varepsilon + 0$ и $\varepsilon + 0, \infty$) (значение ε видно на графиках).



Все вычисления проводились при следующих данных: $R = 0,3 \text{ м}$,

$$h = 0,003 \text{ м}, \quad \lambda^* = 50,6 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot ^\circ\text{C}}; \quad \alpha^* = 22 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{град} \cdot \text{час}},$$

$$\gamma = 7850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \nu = 0,3, \quad c^* = 0,11 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

На рисунке показано изменение напряженного состояния при движении источника тепла по меридиану пологой сферической оболочки со скоростью 9 м/час (а) и 15 м/час (б) (I — $\sigma_{\alpha\alpha}^+$, II — $\sigma_{\alpha\alpha}^-$, III — $\sigma_{\beta\beta}^+$, IV — $\sigma_{\beta\beta}^-$; σ^+ , σ^- — напряжения на верхней и нижней частях оболочки соответственно).

Из рисунков видно, что кривые, описывающие изменение $\sigma_{\alpha\alpha}^+$ и $\sigma_{\alpha\alpha}^-$, пересекаются впереди, а $\sigma_{\beta\beta}^+$ и $\sigma_{\beta\beta}^-$ — сзади движущегося источника нагрева. Такое характерное распределение напряжений при определенной жесткости оболочки может привести к деформациям типа вмятин. Наибольшее растягивающее напряжение $\sigma_{\alpha\alpha}^+$ возникает впереди, а $\sigma_{\beta\beta}^-$ — сзади источника тепла. Из сопоставления графиков видно, что место и величина максимумов $\sigma_{\alpha\alpha}^+$ и $\sigma_{\beta\beta}^-$ зависит от скорости движения источника тепла. С увеличением скорости движения от 9 до 15 м/час по величине $\sigma_{\alpha\alpha}^+$ и $\sigma_{\beta\beta}^-$ уменьшаются в два раза.

Приведенные иллюстрации показывают, что скорость движения существенно влияет на напряженное состояние оболочки. Этот факт можно использовать для снятия остаточных сварочных напряжений в тонких пологих оболочках.

ЛИТЕРАТУРА

1. В л а с о в В. З. Избранные труды. Т. I. Изд-во АН СССР, М., 1962.
2. П і д с т р и г а ч Я. С., Я р е м а С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
3. Ш в е ц Р. Н., П а в л е н к о В. Д. — ФХММ, 1970, 3.
4. П а р к у с Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Физматгиз, М., 1963.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛАСТИНКАХ С ЗАЩЕМЛЕННЫМ ПОДКРЕПЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ

А. Н. Кулик, Л. С. Гульчевский

Пусть тонкая изотропная защемленная по краю $x = 0$ пластинка толщиной 2δ и шириной $2h$ соединена с другой пластинкой такой же толщины (рисунок). Температурные напряжения и перемещения в пластинке «0» определяются по формулам [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^0 &= -2G_0\beta^2\Phi_0 + \frac{2G_0}{1-\nu_0}\beta\left(\nu_0\beta^2\chi_0 - \frac{\partial^2\chi_0}{\partial x^2}\right), \\ \sigma_{yy}^0 &= -2G_0\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{2G_0}{1-\nu_0}\beta\left[\beta^2\chi_0 + (2+\nu_0)\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x^2}\right], \quad (1) \\ \sigma_{xy}^0 &= 2G_0\beta\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} + \frac{2G_0}{1-\nu_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x^2} - \nu_0\beta^2\chi_0\right), \\ u_0 &= \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} - \frac{1+\nu_0}{1-\nu_0}\beta\frac{\partial\chi_0}{\partial x}, \quad v_0 = \beta\Phi_0 + \frac{2}{1-\nu_0}\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x^2} + \beta^2\chi_0, \quad (2) \end{aligned}$$

где χ_0 удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta\chi_0 = 0, \quad (3)$$