$$- 6\lambda_1\omega_1 \cos(3\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1 (2B_1^2a_1^2 + 9B_2^2a_2^2) - 4h_1] -$$

$$- \frac{\varepsilon h_2 A_2 B_1^3 \omega_1^3 a_1^3}{8\rho [(9\omega_1^2 - k)^2 + 36\lambda^2\omega_1^2]} [(9\omega_1^2 - k) \sin(\alpha_2 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1) -$$

$$- 6\lambda\omega_1 \cos(\alpha_2 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1)]; \qquad (19)$$

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\varepsilon A_1 B_1 \omega_1}{8\rho [(\omega_1^2 - k)^2 + 4\lambda^2\omega_1^2]} \{[(\omega_1^2 - k) \cos(\Delta\omega_1) +$$

$$+ 2\lambda\omega_1 \sin(\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1^2 (B_1^2a_1^2 + 18B_2^2a_2^2) - 4h_1] - 27h_2B_2^2\omega_1^2a_2^2 [(\omega_1^2 - k)\cos(\alpha_2 -$$

$$- 3\alpha_1 - \Delta\omega_1) - 2\lambda\omega_1 \sin(\alpha_2 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1)]\};$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{3\varepsilon A_2 B_2 \omega_1}{8\rho [(9\omega_1^2 - k)^2 + 36\lambda^2\omega_1^2]} [(9\omega_1^2 - k) \cos(3\Delta\omega_1) +$$

$$+ 6\lambda\omega_1 \sin(3\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1^2 (2B_1^2a_1^2 + 9B_2^2a_2^2) - 4h_1] -$$

$$- \frac{\varepsilon h_2 A_2 B_1^3 \omega_1^3 a_1^3}{8\rho [(9\omega_1^2 - k)^2 + 36\lambda^2\omega_1^2]} [(9\omega_1^2 - k) \cos(\alpha_2 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1) +$$

$$+ 6\lambda\omega_1 \sin(\alpha_2 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1)].$$

Из полученных уравнений видно, что амплитуды и фазы первой и второй гармоник автоколебаний взаимосвязаны между собой, взаимно влияют друг на друга. Они также зависят от величины $\Delta' = \Delta\omega_1$, т. е. от относительного запаздывания в усилителе. Для более детального анализа этих зависимостей необходимо задать конкретные значения параметров и функций $F(x)$, $B(x)$ и интегрировать систему (19) численными методами или, в крайнем случае, исследовать стационарные режимы колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о р е н ш т е й н И. А., Ш у л ь м а н И. А., С а ф а р ь я н ц А. С. Инерциальная навигация. «Сов. радио», М., 1962.
2. Ц о д и к о в Ю. М.— Автоматика и телемеханика, 1965, 3.
3. В и л ь к е В. Г.— МТТ, 1967, 3.
4. К о р е н е в с к и й Д. Г.— Автореферат док. дис. Институт математики АН УССР, К., 1972.
5. Р у б а н и к В. П.— ДАН УРСР. Сер. А, 1974, 1.

Черновицкий государственный университет

Поступила в редколлегию в январе 1974 г.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ С ЖИДКОСТЬЮ

Р. Н. Швец, Р. А. Марчук

Рассмотрим свободные осесимметричные колебания ортотропной цилиндрической оболочки длины l_0, стыкающейся с невязкой сжимаемой жидкостью. Края оболочки шарнирно опираются на жесткие в своей полости диафрагмы. Движение жидкости считаем безвихревым. Объем, заполненный жидкостью, имеет форму полости между двумя круговыми цилиндрами. Одна стенка полости — гибкая оболочка радиуса R_1, вторая — абсолютно жесткая радиуса R_2. Верхний край оболочки совпадает со свободной поверхностью жидкости, нижний — с днищем полости.

Введем цилиндрические координаты (r_1, θ, x_1), совместив полярную ось x_1 с осью оболочки. Начало отсчета выберем на поверхности жидкости. Прогибы оболочки и перемещения частиц жидкости будем считать достаточно малыми, чтобы задачу можно было рассматривать в линейной постановке [1].

Осесимметричное движение ортотропной цилиндрической оболочки толщиной $2h$ будем описывать уравнениями [2], которые учитывают деформации поперечного сдвига и силы инерции вращения. В безразмерной системе координат $x = \frac{x_1}{R_1}$, $t = \frac{c_1}{R_1} t_1$ эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu_{21} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{k^2}{m\eta^*}\left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \nu_{12}\frac{\partial u}{\partial x} - w = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{R_1}{D_2} P \operatorname{sign} \Delta R; \qquad (1)$$

$$\eta^*\left(\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2}\right) = \gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Здесь

$$k^2 = \frac{h^2}{3R_1^2}; \quad m = \frac{E_2}{E_1}; \quad \eta^* = \frac{k^2 E_1}{k' G_{13}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad \Delta R = R_2 - R_1;$$

$$D_2 = \frac{2hE_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad c_1^2 = \frac{E_1}{\rho(1 - \nu_{12}\nu_{21})};$$

u, w — безразмерные касательные и нормальные перемещения срединной поверхности оболочки, отнесенные к радиусу R_1; γ_x — угол поворота нормали; t_1 — время; E_1, E_2, ν_{12}, ν_{21} — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона для ортотропного материала; ρ — плотность материала оболочки; k' — коэффициент сдвига; P — давление жидкости на стенку оболочки. Модулем сдвига G_{13} учитывается анизотропия упругих свойств в направлении нормали, направленной в стороны выпуклости поверхности оболочки.

Давление жидкости определяется через безразмерный потенциал скоростей φ по формуле

$$P = -\rho_0 c_1^2 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_{r=1}, \qquad (2)$$

где $r = \frac{r_1}{R_1}$; $\varphi_1 = R_1 c_1 \varphi$; φ_1 — потенциал скоростей жидкости; ρ_0 — массовая плотность жидкости.

Потенциал скоростей φ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad (3)$$

и граничным условиям

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right]_{r=1} = \frac{\partial w}{\partial t}; \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right]_{r=\alpha} = 0; \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_{x=l} = 0, \qquad (4)$$

где $\mu = \frac{c_0}{c_1}$; $\alpha = \frac{R_2}{R_1}$; $l = \frac{l_0}{R_1}$; c_0 — акустическая скорость звука в жидкости.

Пренебрегая волновым движением на свободной поверхности жидкости (энергия волнового движения мала по сравнению с общей энергией системы), принимаем

$$[\varphi]_{x=0} = 0. \qquad (5)$$

Систему уравнений (1) с учетом (2) можно свести к одному дифференциальному уравнению, которое в безразмерной системе координат имеет вид

$$\eta_0\eta_1\eta^* \frac{\partial^6 w}{\partial t^6} + \eta_1(1 + m\eta_0\eta^*)\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \eta_1 m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m(1 - \nu_{12}\nu_{21})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ \eta^* m(1 - \nu_{12}\nu_{21})\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - k^2\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - [\eta_0\eta_1 k^2 + (\eta_0 + \eta_1)\eta^*]\frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial t^4} -$$

$$- [1 + \eta^* m(\eta_0 + \eta_1 - \eta_0\nu_{12}\nu_{21})]\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + [\eta^* + k^2(\eta_0 + \eta_1)]\frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} =$$

$$= \frac{\delta}{k}\left\{\eta_0\eta_1\eta^*\left[\frac{\partial^5\varphi}{\partial t^5}\right]_{r=1} + \eta_1\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}\right]_{r=1} + \eta^*\left[\frac{\partial^5\varphi}{\partial x^4\partial t}\right]_{r=1} -\right.$$

$$\left. - (\eta_0 + \eta_1)\,\eta^*\left[\frac{\partial^5\varphi}{\partial x^2\partial t^3}\right]_{r=1} - \left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial t}\right]_{r=1}\right\} \operatorname{sign}\Delta R, \tag{6}$$

где $\delta = \frac{\rho_0}{2\sqrt{3\rho}}$, а η_0, η_1 — «трассеры», принимающие значения либо нуль, либо единица в зависимости от того, учитываются или нет силы инерции поворота и инерции продольного перемещения оболочки соответственно.

Решения уравнений (3) и (6) ищем в виде

$$w = g(t)\,f(x); \quad \varphi = \dot{g}(t)\,\psi(x, r). \tag{7}$$

После разделения переменных из уравнений (3) и (6) получим уравнения

$$[\eta_0\eta^*\lambda^4 - \lambda^2(1 + \eta_0\eta^* m) + m]\,\lambda^2\eta_1 f + [\lambda^4(\eta_1\eta_0 k^2 + \eta_0\eta^* + \eta_1\eta^*) - \lambda^2 -$$

$$- \eta_1\eta^*\lambda^2 - m(1 - \nu_{12}\nu_{21})(\lambda^2\eta_0\eta^* - 1)]\,f'' + [\eta^*\lambda^2 + k^2(\eta_0 + \eta_1)\,\lambda^2 -$$

$$- \eta^* m(1 - \nu_{12}\nu_{21})]\,f^{(IV)} + k^2 f^{(VI)} + \frac{\delta}{k}\lambda^2\left\{[1 - \eta^*\lambda^2(\eta_0 + \eta_1)]\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]_{r=1} -\right.$$

$$\left. - \lambda^2\eta_1(\eta_0\eta^*\lambda^2 - 1)\,[\psi]_{r=1} - \eta^*\left[\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}\right]_{r=1}\right\}\operatorname{sign}\Delta R = 0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}\psi = 0; \tag{9}$$

$$\ddot{g} + \lambda^2 g = 0\left(f' = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t}\right). \tag{10}$$

Форму собственных колебаний представим рядом [3]

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin s_n x \quad \left(s_n = \frac{\pi n}{l}\right), \tag{11}$$

где a_n — коэффициенты, подлежащие определению.

Функция ψ, согласно уравнению (3) и краевым условиям (4), определяется из решения краевой задачи

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \omega^2\psi = 0; \tag{12}$$

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{r=1} = f; \quad [\psi]_{x=0} = \left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{r=\alpha} = 0; \tag{13}$$

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{x=l} = 0, \tag{14}$$

где $\omega = \frac{\lambda}{\mu}$.

Представим ψ в виде суммы двух функций

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \tag{15}$$

каждая из которых удовлетворяет уравнению (12). Кроме того, функция ψ_1 должна удовлетворять условиям (13) и в «среднем» — условию

$$\int_1^{\alpha}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right]_{x=l} r\,dr = 0. \tag{16}$$

Последнее равенство соответствует потери жидкости через сечение $x = l$ за единицу времени [3]. Функцию ψ_1 представим в виде

$$\psi_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin s_n x\,\Phi_0(\beta_n r) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2a_n s_n \sin\omega x}{\omega\beta_n^2(\alpha^2 - 1)\cos\omega l}, \tag{17}$$

где

$$\Phi_0(\beta_n r) = \frac{1}{\beta_n}\,\frac{K_0(\beta_n r)\,I_1(\beta_n\alpha) + K_1(\beta_n\alpha)\,I_0(\beta_n r)}{K_1(\beta_n)\,I_1(\beta_n\alpha) - K_1(\beta_n\alpha)\,I_1(\beta_n)}, \quad \beta_n^2 = s_n^2 - \omega^2;$$

I_τ, K_τ — функции Бесселя от мнимого аргумента. Функция Φ_0 является решением уравнения (3) для бесконечной оболочки [5] с учетом первых двух условий (4). Вторая сумма в выражении (17) подобрана так, чтобы удовлетворялось условие (16).

Функция ψ_2 определяется таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\left[\frac{\partial \psi_2}{\partial r}\right]_{r=1} = \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial r}\right]_{r=\alpha} = [\psi_2]_{x=0} = 0; \tag{18}$$

$$\left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right]_{x=l} = -\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right]_{x=l}. \tag{19}$$

Удовлетворяя граничным условиям (18), функцию ψ_2 представим рядом

$$\psi_2 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{\operatorname{sh} \sqrt{(\varepsilon_i^2 - \omega^2)}\, x}{\sqrt{(\varepsilon_i^2 - \omega^2)} \operatorname{ch} \sqrt{(\varepsilon_i^2 - \omega^2)}\, l}\, \xi_i(r), \tag{20}$$

где функция ξ_i определяется из краевой задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_i}{\partial r} + \varepsilon_i^2 \xi_i = 0; \\ \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial r}\right]_{r=1} = \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial r}\right]_{r=\alpha} = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Решение уравнения (21) возьмем в виде

$$\xi_i = m_i H_i = m_i [\gamma_i J_0(\varepsilon_i r) + Y_0(\varepsilon_i r)]. \tag{22}$$

Постоянные ε_i и γ_i находим из соотношений

$$\gamma_i = -\frac{Y_1(\varepsilon_i \alpha)}{J_1(\varepsilon_i \alpha)} = -\frac{Y_1(\varepsilon_i)}{J_1(\varepsilon_i)}, \tag{23}$$

которые вытекают из граничных условий (21). Нормирующий множитель m_i можно найти из условия

$$\int_0^{2\pi} \int_1^{\alpha} m_i^2 H_i^2 r\, dr\, d\theta = \operatorname{sign} \Delta R,$$

т. е.

$$m_i^2 = \frac{\operatorname{sign} \Delta R}{\pi [\alpha^2 H_i^2(\varepsilon_i \alpha) - H_i^2(\varepsilon_i)]}. \tag{24}$$

Подставляя выражения (17) и (20) в граничное условие (19) и интегрируя по области, занятой жидкостью, находим

$$b_i = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n a_n s_n \int_0^{2\pi} \int_1^{\alpha} \Phi_0(\beta_n r)\, \xi_i(r)\, r\, dr\, d\theta. \tag{25}$$

Выполняя интегрирование в (25) с учетом равенств (23), имеем

$$\int_0^{2\pi} \int_1^{\alpha} \Phi_0(\beta_n r)\, \xi_i(r)\, r\, dr\, d\theta = \frac{2\pi}{\beta_n^2 + \varepsilon_i^2} [\xi_i]_{r=1}.$$

В результате находим

$$\psi_2 = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n a_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i \operatorname{sh} \sqrt{(\varepsilon_i^2 - \omega^2)}\, x}{\sqrt{(\varepsilon_i^2 - \omega^2)} (\beta_n^2 + \varepsilon_i^2) \operatorname{ch} \sqrt{(\varepsilon_i^2 - \omega^2)}\, l} [\xi_i]_{r=1}. \tag{26}$$

Теперь выражения (11) и (15) с учетом (17) и (26) подставим в (8). Далее, применяя вариационный метод Бубнова — Галеркина [4], сводим задачу расчета форм и частот λ собственных колебаний ортотропной цилиндрической оболочки к решению бесконечной системы алгебраических уравнений

$$la_sB_{1s} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+s}s_n a_n\left\{B_2\frac{s\xi \operatorname{tg}\omega l}{\omega\beta_n^2(\alpha^2-1)\beta_s^2} + \right.$$

$$\left. + \pi s\xi\sum_{i=1}^{\infty}B_{3i}\frac{[\xi_i^2]_{r=1}\operatorname{th}\sqrt{(\varepsilon_i^2-\omega^2)}\,l}{(\beta_n^2+\varepsilon_i^2)(\xi^2s^2+\varepsilon_i^2-\omega^2)\sqrt{(\varepsilon_i^2-\omega^2)}}\right\} = 0 \qquad (27)$$

при $s = 1, 2, 3, \ldots$ Здесь введены обозначения

$$B_{1s} = Q_1 - Q_2\xi^2s^2 + Q_3\xi^4s^4 - Q_4\xi^6s^6 + \Phi_0(\beta_s)[Q_6 - s^2\xi^2Q_5 + s^4\xi^4Q_7];$$

$$B_2 = Q_5\omega^2 - Q_6 - Q_7\omega^4; \quad B_{3i} = Q_5(\varepsilon_i^2 - \omega^2) + Q_6 + Q_7(\varepsilon_i^2 - \omega^2)^2;$$

$$Q_1 = \eta_1[\lambda^2(\eta_0\eta^*\lambda^2 - \eta_0\eta^*m - 1) + m];$$

$$Q_2 = \lambda^2(\eta_0\eta_1k^2 + \eta_0\eta^* + \eta_1\eta^*) - 1 - \eta_1\eta^*m + m(1 - \nu_{12}\nu_{21})\left(\frac{1}{\lambda^2} - \eta_0\eta^*\right);$$

$$Q_3 = \eta^* + k^2(\eta_0 + \eta_1) - \frac{m}{\lambda^2}\eta^*(1 - \nu_{12}\nu_{21}); \quad Q_4 = \frac{k^2}{\lambda^2};$$

$$Q_5 = \frac{\delta}{k}[(\eta_0 + \eta_1)\eta^*\lambda^2 - 1]\operatorname{sign}\Delta R; \quad Q_6 = \frac{\delta}{k}\lambda^2\eta_1(\eta_0\eta^*\lambda^2 - 1)\operatorname{sign}\Delta R;$$

$$\xi = \frac{\pi}{l}; \quad Q_7 = \frac{\delta}{k}\eta^*\operatorname{sign}\Delta R; \quad \beta_s^2 = \frac{\pi^2s^2}{l^2} - \omega^2.$$

Система (27) допускает бесконечное число типов колебаний. Если положить в системе (27) $\omega = 0$, то получим систему уравнений, которая описывает колебание оболочки, соприкасающейся с несжимаемой жидкостью. Это допущение может быть оправдано, если ограничиться исследованием спектра частот (λ) основного (нулевого) типа колебаний [3, 5]. Поскольку осевые силы инерции и силы инерции вращения практически не влияют на частоты основного типа, то ими можно пренебречь ($\eta_0 = \eta_1 = 0$). В этом случае система (27) значительно упрощается.

Если искать приближенное решение для f в виде конечной суммы $f = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin s_n x$, то задача расчета форм и частот колебаний сведется к решению конечной системы уравнений, которая получается усечением бесконечной системы (27).

Из анализа решения и проведенных расчетов следует, что деформация поперечного сдвига, а также анизотропия свойств материала как по толщине, так и в ее срединной поверхности значительно влияют на величину собственных частот колебаний оболочки. Кроме того, при исследовании последующих типов колебаний необходимо учитывать осевые силы инерции оболочки, а также сжимаемость жидкости [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В.— Инженерный сборник, 1956, 24.
2. Лунь Е. И., Швец Р. Н.— В кн.: Распространение упругих и упругопластических волн. «Наука», КазССР, Алма-Ата, 1973.
3. Мнев Е. Н.— Прикладна механіка, 1960, 9, 2.
4. Свирский И. В. Методы типа Бубнова — Галеркина и последовательных приближений. «Наука», М., 1968.
5. Швец Р. Н., Марчук Р. А.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 1. «Наукова думка», К., 1975.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1973 г.