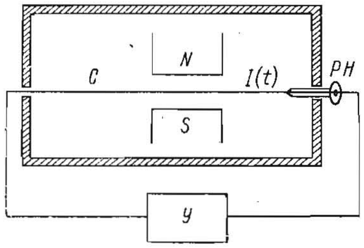
ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ СТРУННОГО ГЕНЕРАТОРА

В. П. Рубаник

В измерительной технике широко используется струнный генератор (см. например, [1]), схема которого изображена на рисунке (C — струна; PH — регулятор натяжения струны; N, S — полюсы магнита; $У$ — усилитель). В работах [2, 3] исследовались автоколебания генератора на основной частоте струны. Результаты этих исследований не вполне согласовались с экспериментальными данными. В работе [4] проведено исследование автоколебаний струнного генератора с учетом запаздывания в усилителе. Учет запаздывания в усилителе приводит к результатам, лучше согласующимся с экспериментальными данными. Однако в работе [4] рассмотрены автоколебания лишь на основной частоте струны.



Вместе с тем, в связи с нелинейностью усилителя и тем, что частоты собственных колебаний струны находятся в простом кратном отношении, необходимо учитывать взаимодействие между колебаниями на различных частотах. Поэтому необходимо исследовать автоколебания струнного генератора с учетом нескольких собственных частот и взаимодействия между колебаниями на этих частотах. Так как амплитуды колебаний высших частот быстро уменьшаются, достаточно ограничиться несколькими первыми частотами.

В настоящей работе исследуем автоколебания струнного генератора на нескольких частотах одновременно с учетом запаздывания в усилителе. При этом воспользуемся общим асимптотическим методом, изложенным в работе [5].

Колебания струны, по которой проходит ток $I(t)$, с учетом малого трения и взаимодействия с магнитом, будут описываться уравнением

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \frac{2\varepsilon h_0}{\rho} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho} F(x) I(t), \tag{1}$$

где $F(x)$ характеризует магнитную индукцию от полюсов магнита N, S; ε — малый параметр.

С учетом характера закрепления струны получаем граничные условия

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \tag{2}$$

Будем предполагать, что усилитель описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dI(t)}{dt} + kI(t) = \frac{dY(t-\Delta)}{dt}, \\ Y(t) = h_1 E(t) - h_2 E^3(t), \\ E(t) = \int_0^l B(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\, dx,\end{gathered} \tag{3}$$

где $I(t)$ — ток, проходящий по струне от усилителя; $E(t)$ — напряжение на струне, индуцируемое магнитом.

При $\varepsilon = 0$ собственные незатухающие колебания струны определяются функцией

$$u_0(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(\omega_j t + \alpha_j) \sin \frac{2j\pi x}{l}, \tag{4}$$

где $\omega_j = \frac{2j\pi c}{l} = j\omega_1$, a_j, α_j — произвольные постоянные.

Предположим, что магниты расположены симметрично относительно середины струны, т. е. $B(l-x)=B(x)$, $F(l-x)=F(x)$. Тогда в силу нечетности нелинейной характеристики усилителя четные гармоники усиливаться не будут, а будут быстро затухать. Поэтому ими можно пренебречь. Пренебрегая малыми колебаниями гармоник высокого порядка, можно ограничиться выражением

$$u_0(t,x)\approx\sum_{s=1}^{H}a_s\cos[(2s-1)\omega_1 t+\alpha_s]\sin\frac{2\pi(2s-1)x}{l}, \tag{5}$$

где H — небольшое целое число.

Функция $E(t)$ представится приближенно в виде

$$E_0(t)\approx-\omega_1\sum_{s=1}^{H}(2s-1)B_s a_s\sin[(2s-1)\omega_1 t+\alpha_s], \tag{6}$$

где

$$B_s=\int_0^l B(x)\sin\frac{2\pi(2s-1)x}{l}\,dx. \tag{7}$$

Для функции $I(t)$ получим выражение

$$I_0(t)\approx\sum_{s=1}^{H}\{M_s(a,\alpha,\Delta\omega_1)\cos[(2s-1)\omega_1 t]+$$
$$+N_s(a,\alpha,\Delta\omega_1)\sin[(2s-1)\omega_1 t\}+V_1(\omega_1 t), \tag{8}$$

где $V_1(\omega_1 t)$ содержит в своем разложении гармоники порядка выше $2H$. Выражения для $M_s(a,\alpha,\Delta\omega_1)$, $N_s(a,\alpha,\Delta\omega_1)$ громоздкие и мы их не выписываем.

При $\varepsilon\neq0$ решение (1), (2) ищем приближенно в форме

$$u(t,x)=\sum_{s=1}^{H}a_s(t)\cos[(2s-1)\varphi(t)+\alpha_s(t)]\sin\frac{2\pi(2s-1)x}{l}+$$
$$+\varepsilon u_1[x,\varphi(t),a(t),\alpha(t)], \tag{9}$$

где $\varphi(t)=\omega_1 t$, $a=\{a_s\}$, $\alpha=\{\alpha_s\}$, $u_1(x,\varphi,a,\alpha)$ — ограниченная при $x\in[0,l]$, конечных a и любых φ, α, периодическая по аргументу φ с периодом 2π и не содержащая в своем разложении гармоник порядка ниже $2H$ функция; $a_s(t)$ и $\alpha_s(t)$ — медленно изменяющиеся функции, которые удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da_s}{dt}=\varepsilon P_s(a,\alpha),$$
$$\frac{d\alpha_s}{dt}=\varepsilon Q_s(a,\alpha)\qquad(s=1,\ 2,\ \dots,\ H). \tag{10}$$

Дифференцируя равенство (9) с учетом (10), подставляя его в формулы (1)—(3) и ограничиваясь членами порядка ε, получаем

$$\omega_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}=c^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{2h_0\omega_1}{\rho}\sum_{s=1}^{H}(2s-1)a_s\sin[(2s-1)\varphi+$$
$$+\alpha_s]\sin\frac{2\pi(2s-1)x}{l}+2\omega_1\sum_{s=1}^{H}(2s-1)\{P_s\sin[(2s-1)\varphi+\alpha_s]+$$
$$+a_sQ_s\cos[(2s-1)\varphi+\alpha_s]\}\sin\frac{2\pi(2s-1)x}{l}+\frac{1}{\rho}B(x)I_0(a,\varphi,\alpha); \tag{11}$$

$$u_1(0,\varphi,a,\alpha)=u_1(l,\varphi,a,\alpha)=0, \tag{12}$$

где $I_0(a,\varphi,\alpha)$ имеет вид (8), но с переменными a и α.

Разложим $F(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям:

$$F(x)=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\sin\frac{2\pi(2s-1)x}{l}. \tag{13}$$

где A_s определяется формулой

$$A_s = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{2\pi(2s-1)x}{l} dx. \tag{14}$$

Функцию $u_1(x, \varphi, a, \alpha)$ ищем в виде такого же ряда

$$u_1(x, \varphi, a, \alpha) = \sum_{s=1}^{\infty} w_s^{(1)}(\varphi, a, \alpha) \sin \frac{2\pi(2s-1)x}{l}. \tag{15}$$

Подставляя выражения (13), (15) в (11), приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях и ограничиваясь конечным числом членов, получаем

$$\omega_1^2 \frac{\partial^2 w_s^{(1)}}{\partial \varphi^2} + \omega_{2s-1}^2 w_s^{(1)} = \frac{2h_0\omega_1}{\rho}(2s-1) a_s \sin[(2s-1)\varphi + \alpha_s] +$$
$$+ 2\omega_1(2s-1)\{P_s \sin[(2s-1)\varphi - \alpha_s] + a_s Q_s \cos[(2s-1)\varphi + \alpha_s]\} +$$
$$+ \frac{A_s}{\rho} I_0(a, \varphi, \alpha) \qquad (s = 1, 2, \ldots, H). \tag{16}$$

Правые части (16) представлены рядами Фурье по аргументу φ. В таком же виде ищем и функции $w_s^{(1)}$ (φ, a, α). При этом, чтобы не получилось вековых членов, мы должны потребовать, чтобы s-е уравнение не содержало в правой части гармоник с аргументом $(2s-1)\varphi$. Этого можно добиться с помощью выбора P_s и Q_s.

Приравнивая в выражении (16) нулю коэффициенты при $\cos[(2s-1)\varphi]$ и $\sin[(2s-1)\varphi]$, получаем

$$\frac{h_0\omega_1(2s-1)}{\rho} a_s \sin\alpha_s + \omega_1(2s-1)(P_s \sin\alpha_s +$$
$$+ a_s Q_s \cos\alpha_s) + \frac{A_s}{2\rho} M_s(a, \alpha, \Delta\omega_1) = 0, \tag{17}$$
$$\frac{h_0\omega_1(2s-1)}{\rho} a_s \cos\alpha_s + \omega_1(2s-1)(P_s \cos\alpha_s - \alpha_s Q_s \sin\alpha_s) +$$
$$+ \frac{A_s}{2\rho} N_s(a, \alpha, \Delta\omega_1) = 0.$$

Из этих равенств получаем

$$P_s(a, \alpha) = -\frac{h_0 a_s}{\rho} - \frac{A_s}{2\rho\omega_1(2s-1)}[M_s(a, \alpha, \Delta\omega_1)\sin\alpha_3 +$$
$$+ N_s(a, \alpha, \Delta\omega_1)\cos\alpha_s], \tag{18}$$
$$Q_s(a, \alpha) = -\frac{A_s}{2\rho\omega_1(2s-1)a_s}[M_s(a, \alpha, \Delta\omega_1)\cos\alpha_s - N_s(a, \alpha, \Delta\omega_1)\sin\alpha_s].$$

Далее, методом неопределенных коэффициентов находим $w_s^1(a, \varphi, \alpha)$.

Как уже отмечалось, при больших H выражения для M_s и N_s, а значит, и для P_s и Q_s будут очень громоздкими. Если ограничиться случаем $H = 2$, то для P_1, P_2, Q_1, Q_2 получим более простые выражения, которые можно выписать в развернутом виде. Тогда уравнения для определения a_1, a_2, α_1, α_2 примут вид

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\varepsilon h_0 a_1}{\rho} - \frac{\varepsilon A_1 B_1 \omega_1 a_1}{8\rho[(\omega_1^2 - k)^2 + 4\lambda^2\omega_1^2]}\{[(\omega_1^2 - k)\sin(\Delta\omega_1) -$$
$$- 2\lambda\omega_1\cos(\Delta\omega_1)][3h_2\omega_1^2(B_1^2a_1^2 + 18B_2^2a_2^2) - 4h_1] + 27h_2B_2^2\omega_1^2a_2^2[(\omega_1^2 -$$
$$- k)\sin(\alpha_2 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1) + 2\lambda\omega_1\cos(\alpha_2 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1)]\};$$

$$\frac{da_2}{dt} = -\frac{\varepsilon h_0 a_2}{\rho} - \frac{3\varepsilon A_2 B_2 \omega_1 a_2}{8\rho[(9\omega_1^2 - k)^2 + 36\lambda^2\omega_1^2]}[(9\omega_1^2 - k)\sin(3\Delta\omega_1) -$$

$$- 6\lambda_1\omega_1 \cos(3\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1 (2B_1^2a_1^2 + 9B_2^2a_2^2) - 4h_1] -$$

$$- \frac{\varepsilon h_2 A_2 B_1^3 \omega_1^3 a_1^3}{8\rho [(9\omega_1^2 - k)^2 + 36\lambda^2\omega_1^2]} [(9\omega_1^2 - k) \sin(\alpha_2 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1) -$$

$$- 6\lambda\omega_1 \cos(\alpha_2 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1)]; \qquad (19)$$

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\varepsilon A_1 B_1 \omega_1}{8\rho [(\omega_1^2 - k)^2 + 4\lambda^2\omega_1^2]} \{[(\omega_1^2 - k) \cos(\Delta\omega_1) +$$

$$+ 2\lambda\omega_1 \sin(\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1^2 (B_1^2a_1^2 + 18B_2^2a_2^2) - 4h_1] - 27h_2B_2^2\omega_1^2a_2^2 [(\omega_1^2 - k) \cos(\alpha_2 -$$

$$- 3\alpha_1 - \Delta\omega_1) - 2\lambda\omega_1 \sin(\alpha_2 - 3\alpha_1 - \Delta\omega_1)]\};$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{3\varepsilon A_2 B_2 \omega_1}{8\rho [(9\omega_1^2 - k)^2 + 36\lambda^2\omega_1^2]} [(9\omega_1^2 - k) \cos(3\Delta\omega_1) +$$

$$+ 6\lambda\omega_1 \sin(3\Delta\omega_1)] [3h_2\omega_1^2 (2B_1^2a_1^2 + 9B_2^2a_2^2) - 4h_1] -$$

$$- \frac{\varepsilon h_2 A_2 B_1^3 \omega_1^3 a_1^3}{8\rho [(9\omega_1^2 - k)^2 + 36\lambda^2\omega_1^2]} [(9\omega_1^2 - k) \cos(\alpha_2 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1) +$$

$$+ 6\lambda\omega_1 \sin(\alpha_2 - 3\alpha_1 + 3\Delta\omega_1)].$$

Из полученных уравнений видно, что амплитуды и фазы первой и второй гармоник автоколебаний взаимосвязаны между собой, взаимно влияют друг на друга. Они также зависят от величины $\Delta' = \Delta\omega_1$, т. е. от относительного запаздывания в усилителе. Для более детального анализа этих зависимостей необходимо задать конкретные значения параметров и функций $F(x)$, $B(x)$ и интегрировать систему (19) численными методами или, в крайнем случае, исследовать стационарные режимы колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горенштейн И. А., Шульман И. А., Сафарьянц А. С. Инерциальная навигация. «Сов. радио», М., 1962.
2. Цодиков Ю. М.— Автоматика и телемеханика, 1965, 3.
3. Вильке В. Г.— МТТ, 1967, 3.
4. Кореневский Д. Г.— Автореферат док. дис. Институт математики АН УССР, К., 1972.
5. Рубаник В. П.— ДАН УРСР. Сер. А, 1974, 1.

Черновицкий государственный университет

Поступила в редколлегию в январе 1974 г.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ С ЖИДКОСТЬЮ

Р. Н. Швец, Р. А. Марчук

Рассмотрим свободные осесимметричные колебания ортотропной цилиндрической оболочки длины l_0, стыкающейся с невязкой сжимаемой жидкостью. Края оболочки шарнирно опираются на жесткие в своей полости диафрагмы. Движение жидкости считаем безвихревым. Объем, заполненный жидкостью, имеет форму полости между двумя круговыми цилиндрами. Одна стенка полости — гибкая оболочка радиуса R_1, вторая — абсолютно жесткая радиуса R_2. Верхний край оболочки совпадает со свободной поверхностью жидкости, нижний — с днищем полости.

Введем цилиндрические координаты (r_1, θ, x_1), совместив полярную ось x_1 с осью оболочки. Начало отсчета выберем на поверхности жидкости. Прогибы оболочки и перемещения частиц жидкости будем считать достаточно малыми, чтобы задачу можно было рассматривать в линейной постановке [1].

Осесимметричное движение ортотропной цилиндрической оболочки толщиной $2h$ будем описывать уравнениями [2], которые учитывают деформации