ЛИТЕРАТУРА

1. Волошина М. С. Некоторые граничные задачи для сильноэллиптических систем второго порядка. Автореферат канд. дис., Львов, 1959.
2. Волошина М. С.— ДАН УРСР, 1958, 9.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз, М., 1958.
4. Гупало Г. С.— ДАН УРСР, 1966, 7.
5. Гупало Г. С.— Вісн. Львівського ун-ту. Сер. мех.-мат., 1969, 4.
6. Лопатинский Я. Б.— УМЖ, 1951, 1.
7. Лопатинський Я. Б.— ДАН УРСР, 1956, 1.
8. Рогожин В. С., Данко С. П.— Дифференциальные уравнения, 1971, 7, 3.
9. Szmydt Z.— Mat. natur., 1962, 33, 6.

Львовский государственный университет,
Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕРМОМЕХАНИКА
(обзор)

Ю. М. Коляно

В последние годы все интенсивней развивается новое научное направление в термомеханике — исследование динамических процессов в анизотропных и изотропных телах с учетом конечной скорости распространения тепла (КСРТ) c_q [7, 27, 42].

Вводя в принцип Онзагера характеристику скорости изменения теплового потока q_i — тепловую инерцию $\tau_r \frac{\partial q_i}{\partial \tau}$ [52] (τ_r — время релаксации теплового потока) С. Калиский [48] получил обобщенный закон теплопроводности анизотропных тел в виде

$$\lambda_{ij}t_j = lq_i, \qquad l = 1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{1}$$

Учитывая члены, появляющиеся в уравнении теплопроводности и в граничных условиях теплообмена, полученных на основе этого закона, а также инерционные члены в уравнениях равновесия, приходим к новой теории динамической термомеханики, получившей название обобщенной [42]. Динамические задачи термомеханики, решаемые на основе уравнений этой теории, в отличие от классических задач, не учитывающих влияния тепловой инерции, будем называть обобщенными [10].

Обобщенная термоупругость пространственных тел. Обоснование обобщенного закона теплопроводности для изотропных тел и полученного на его основе уравнения теплопроводности гиперболического типа наиболее полно представлено в работе [2]. А. В. Лыков [24], проанализировав обобщенную задачу теплопроводности для полупространства, граничное значение температуры которого изменяется в начальный момент времени τ на некоторую величину, оставаясь далее постоянным, дал обоснование физического смысла КСРТ, представляющей собой производную по времени от глубины проникновения тепла

$$c_q = \frac{d\left(\tau \sqrt{\frac{a}{\tau_r}}\right)}{d\tau} = \sqrt{\frac{a}{\tau_r}}, \tag{2}$$

где a — коэффициент температуропроводности. Поскольку для металлов $\tau_r \approx 10^{-11}$ *сек* [24], то для стали $c_q = 1800$ *м/сек*, для алюминия $c_q = 2930$ *м/сек*.

Основные уравнения взаимосвязанной обобщенной динамической задачи линейной термоупругости анизотропных тел имеют вид [10,34]

$$c_{ijkl}u_{k,lj} + X_i = \rho\ddot{u}_i + \beta_{ij}\theta_j, \tag{3}$$

$$\lambda_{ij}\theta_{ij} = l\,(c\dot{\theta} + t_0\beta_{ij}\dot{e}_{ij} + w), \tag{4}$$

где λ_{ij} — коэффициенты теплопроводности; c — обьемная теплоемкость;

w — плотность источников тепла; t_0 — температура тела в недеформированном состоянии; остальные обозначения — общепринятые [30]. С. Калиский [48] впервые получил эту систему без учета влияния тепловой инерции на источники тепла. Соответствующая система уравнений для изотропных тел представлена в работе [50]. Представление общего решения этой системы для анизотропных тел дано в работе [38]. Основные теоремы обобщенной термоупругости анизотропных тел доказаны автором и Е. П. Хомякевичем. Соответствующая (3),(4) система уравнений для изотропных тел и некоторые из основных теорем приводятся в работе [43], а в работе [45] сформулирован обобщенный принцип Онзагера для изотропных тел и даны некоторые его применения. Уравнение теплопроводности (4) для одномерного случая получено Б. А. Григорьевым [3] без учета члена $t_0\beta_{ij}l\dot{\varepsilon}_{ij}$, определяющего сопряжение полей температуры и деформации.

Основные обобщенные граничные условия теплообмена для анизотропных и изотропных тел приведены в работах [10, 34, 38].

Решение вопросов, касающихся изучения обобщенных динамических температурных напряжений в окрестности различных инородных включений, требует разработки основ соответствующей теории. С этой целью в работах автора и Е. П. Хомякевича сформулированы обобщенные термомеханические условия неидеального контакта разнородных тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя [22]; термомеханические граничные условия на покрытой поверхности твердых тел [20] и на поверхности тел, содержащих малые сферические включения. В частности, последние имеют такой вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\tau_r^{(0)}}{\tau_r}\Lambda\int_0^{\tau} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r}}\left[\frac{\partial t(r,\zeta)}{\partial r}\right]^{*} d\zeta = C_0\int_0^{\tau} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(0)}}} l_\zeta^{(0)}\frac{\partial t^*}{\partial\zeta}\,d\zeta - \\
-4\pi\int_0^R\int_0^{\tau}\eta^2 e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(0)}}} l_\zeta^{(0)}\, w_0(\eta,\zeta)\,d\eta d\zeta, \\
N_r^* = \frac{3}{5}\rho_v^{(0)}\ddot{u}^* + \frac{8\pi(1+\nu_0)}{1-2\nu_0}g_0(u^* - A_t^{(0)}t^*),
\end{gathered} \tag{5}$$

где $\Lambda = \lambda S$ — приведенная теплопроводность тела на поверхности $S = 4\pi R^2$ стыка с включением; $C_0 = c_0 V$ — приведенная теплоемкость $\left(V = \frac{4}{3}\pi R^3\right)$; $l_\zeta^{(0)} = 1 + \tau_r^{(0)}\frac{\partial}{\partial\zeta}$; $N_r^* = \sigma_{rr}^* S$ — радиальное усилие к поверхности S тела, $\overset{0}{\rho_v} = \rho_0 V$ — приведенная плотность; $A_t^{(0)} = \alpha_t^{(0)} R$, $g_0 = G_0 R$ — приведенные коэффициент линейного расширения и модуль сдвига; ν_0 — коэффициент Пуассона; w_0 — плотность источников тепла включения. Величины со звездочкой соответствуют граничным значениям (при $r = R$).

На основе развитой обобщенной теории ряд авторов получили решения одномерных и двухмерных взаимосвязанных и несвязанных динамических задач термоупругости для тел, подвергаемых тепловым ударам или периодическим воздействиям. Впервые обобщенная взаимосвязанная динамическая задача термоупругости (ОВДЗТ) для полупространства, подвергнутого тепловому удару по краевой поверхности, решена Е. Б. Поповым [32]. Затем Лорд и Шульман [51] также рассмотрели полупространство, на границе которого заданы напряжение или температура в виде единичного скачка, пренебрегая инерционным членом связности. Норвуд и Варен показали [5[illegible]], что пренебрежение этим членом приводит к исчезновению трех из четырех возможных скачков на фронтах и к изменению значений самих скоростей. Ахенбах [47] рассмотрел полупространство, на границе которого прилагается механическая нагрузка в виде единичного скачка. Лорд и Лопез [52] изучают ОВДЗТ для полупространства при заданном граничном значении безразмерных напряжения и температуры как функций времени. Подробно рассмотрены случаи: граничное значение температуры равно нулю, напряжение изменяется в виде единичной функции $S_+(\tau)$; граничное значение напряжения равно нулю, а температуры — задается в виде произведения $S_+(\tau)\,\sin\omega\tau S_+\left(\frac{\pi}{\omega}-\tau\right)$. Найфег [54] рассматривает полупространство, когда на его границе задается температура или тепловой поток. В работах Г. А. Кильчинской [4, 5] построены автомодельные решения ОВДЗТ для полупространства и исследовано распространение связанных термоупругих возмущений при постоянном тепловом потоке на границе. Решение ОВДЗТ для пространства со сферической полостью и цилиндра получил Ведхаван [58, 59] для случая, когда нормальное давление и температура — произвольные функции времени. Как и в работе [55], рассмотрены частные случаи. Для них получены асимптотические решения, соответствующие малым значениям времени. Решению ОВДЗТ посвящены также работы [53, 56]. В работах [23, 35, 45] изучается распространение плоских, сферических и цилиндрических волн в пространстве, полупространстве, пространстве со сферической или цилиндрической полостью, слое, обусловленных внутренними источниками тепла или внешней средой (при граничных условиях первого или второго рода), изменяющихся во времени по гармоническому закону Ю. К. Энгельбрехтом [46] проведено исследование мод (частных решений, зависящих по экспоненте от времени и одной из координат) системы уравнений обобщенной линейной термоупругости. Им показано, что при больших частотах и коротких волнах КСРТ играет существенную роль.

Обобщенные несвязанные динамические задачи термоупругости (ОНДЗТ) для полупространства, слоя, цилиндра, шара, пространства со сферической или цилиндрической полостью изучаются в работах [17, 25, 26, 33, 36—38] при граничном условии теплообмена первого или третьего рода для случая, когда температура среды изменяется в начальный момент времени на некоторую величину, оставаясь далее неизменной (тепловой удар). В работе [18] учитывается также конечность скорости изменения теплового воздействия на поверхности пространства со сферической полостью. В. Г. Андреев и П. И. Уляков [1] в такой же постановке обобщили результаты М. Д. Михайлова [25]. В. Г. Чебан и В. Г. Сучеван [41] решили ОНДЗТ для полупространства с учетом выгорания материала. Решение ОНДЗТ для слоя, нагреваемого источниками тепла, плотность которых изменяется по закону Бугера, приведено в работе [38].

Построению математических моделей обобщенной нелинейной термоупругости посвящены работы У. К. Нигула [28], У. К. Нигула и Ю. К. Энгельбрехта [29]. Ими показано, что при нелинейных переходных процессах распространения волн деформации, возбужденных механическим воздействием, геометрически нелинейные, физически нелинейные и тепловые эффекты взаимосвязаны и требуют комплексного учета. Нелинейные волновые явления в автомодельных термомеханических системах изучаются Г.А. Кильчинской [6] с учетом КСРТ.

Обобщенная термоупругость тонкостенных элементов конструкций. Уравнения обобщенной теплопроводности для анизотропных пластин выведены операторным методом и методом предельного перехода в работе [10] без предварительных предположений о распределении температуры по их толщине. Приближенные уравнения для определения интегральных характеристик температуры T и T^* запишутся так:

$$\begin{gathered} LT - l(\alpha_+ T + \alpha_- T^*) = -l(W + \alpha_+ t_+^c + \alpha_- t_-^c), \\ LT^* - 3\left[\alpha_- l T + \left(\frac{4}{r_z} + l\alpha_+\right)T^*\right] = -l(W^* + 3\alpha_+ t_-^c + 3\alpha_- t_+^c). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь оператор L, например для пластинки с прямолинейной анизотропией, имеет вид

$$L = \Lambda_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\Lambda_{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \Lambda_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - Cl\frac{\partial}{\partial \tau},$$

где Λ_{ij}, C — приведенные коэффициенты теплопроводности и теплоемкости; $r_z = \frac{2\delta}{\lambda_{33}}$ — термосопротивление в направлении z;

$$t_{\pm}^c = \frac{t_c^+ \pm t_c^-}{2}, \quad \alpha_{\pm} = \alpha_z^+ \pm \alpha_z^-, \quad W = \int_{-\delta}^{\delta} w dz, \quad W^* = \frac{3}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} zw dz;$$

$\alpha_z^{\pm}$ — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $z = \pm\delta$; $t_c^{\pm}$ — температуры сред, омывающих эти поверхности.

Аналогичные уравнения теплопроводности для изотропных оболочек имеют такой вид:

$$\begin{gathered} LT - \alpha_+ l(T - t_+^c) - \alpha_- l(T^* - t_-^c) + 4k\lambda T^* = -lW, \\ LT^* - 3\alpha_+ l(T^* - t_-^c) - 3\alpha_- l(T - t_+^c) - \frac{12}{r_\gamma}T^* = -lW^*, \end{gathered} \tag{7}$$

где $L = \Lambda\Delta - Cl\frac{\partial}{\partial\tau}$; Δ — оператор Лапласа [31]; k — средняя кривизна срединной поверхности оболочки; $r_\gamma = \frac{2\delta}{\lambda}$.

Уравнение теплопроводности для ортотропных стержней запишется в виде

$$\left(\Lambda_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} - Cl\frac{\partial}{\partial\tau}\right)T - A_\Sigma l(T - t_c) = -lW, \tag{8}$$

где $\Lambda_x = \lambda_x F$ — приведенный коэффициент теплопроводности в направлении оси стержня; $C = cF$ — приведенная теплоемкость; F — площадь поперечного сечения стержня; $T = \frac{1}{F}\iint_F t dF$. $W = \iint_F w dF$, A_Σ — приведенная теплоотдача всей поверхности стержня; t_c — температура среды, омывающей эту поверхность.

Соответствующие уравнения несвязанной динамической задачи термоупругости для пластин, оболочек и стержней остаются неизменными. Вместе с уравнениями теплопроводности (6) — (8) они представляют собой уравнения ОНДЗТ для рассматриваемых тонкостенных элементов конструкций.

Уравнения ОВДЗТ получены [9, 10] для анизотропных пластин, находящихся в условиях обобщенного плоского термонапряженного состояния. Дано также представление их общего решения.

На основе уравнений ОНДЗТ в работах [8, 10—12, 14—16, 19, 21, 34, 39, 40] получены решения одномерных и двумерных динамических задач термоупругости для пластин и балки, подвергаемых тепловым ударам внешней средой или источниками тепла по краевой или боковой поверхности. Отметим, что связь между динамическими температурными напряжениями σ_{ij}, возникающими в теле при тепловом ударе источниками тепла, и напряжениями $\tilde{\sigma}_{ij}$, соответствующими постоянной во времени плотности источников тепла, имеет следующий вид [10]:

$$\sigma_{ij} = l\tilde{\sigma}_{ij}. \tag{9}$$

Обобщенная магнитотермоупругость, термовязкоупругость и термопластичность. Основные уравнения обобщенной магнитотермоупругости выведены Калиским [49]. На основе этих уравнений Н. А. Кондратюк получил решения ОНДЗМТ для цилиндра, пространства с цилиндрической полостью и полупространства идеальной электропроводности, находящихся в однородном магнитном поле и подвергаемых по краевой поверхности тепловому удару внешней средой.

Обобщенная несвязанная динамическая задача термовязкоупругости для полубесконечной пластинки, подвергаемой тепловому удару по краевой поверхности решена автором и М. М. Семераком [13].

Исследованию взаимосвязанных термоакустических волн в анизотропных и изотропных термопластических материалах с учетом конечной скорости распространения тепла посвящена работа [57]. Для анализа распространения волн в пластических материалах использован метод сингулярных поверхностей. В общем случае найдены четыре скорости распространения, характеризующиеся разрывами в скоростях изменения температуры и разрывами в ускорениях. Основные волны распределены на два вида: две поперечные волны, которые имеют одинаковую скорость распространения и являются чисто механическими, и две взаимосвязанные волны с механической продольной и термической составляющими. Исследованы скорости распространения и значения отношений тепловых и механических амплитуд взаимосвязанных волн.

Таким образом, из обзора работ, посвященных обобщенной термомеханике, следует, что значительное развитие получила обобщенная термоупругость. Исследованию динамических процессов в неупругих телах с учетом КСРТ посвящены лишь единичные работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. Г., Уляков П. И.— ИФЖ, 1971, **21**, 1.
2. Баумейстер К., Хамилл Т.— Теплопередача. Сер. С, 1969, 4.
3. Григорьев Б. А.— Теплофизика высоких температур, 1973, 1.
4. Кільчинська Г. А.— ДАН УРСР. Сер. А, 1970, 4.
5. Кильчинская Г. А.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 11. «Наукова думка», К., 1971.
6. Кильчинская Г. А.— В кн.: Труды симпозиума «Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах». Ч. II. Изд-во Горьковского ун-та, Горький, 1973.
7. Коваленко А. Д.— Прикладная механика, 1970, **6**, 4.
8. Коляно Ю. М.— ДАН УРСР. Сер. А, 1970, 7.
9. Коляно Ю. М.— ДАН УРСР. Сер. А, 1971, 12.
10. Коляно Ю. М.— Автореферат докт. дис. Институт механики АН УССР, К., 1972.
11. Коляно Ю. М., Гирняк О. Ф.— Проблемы прочности, 1971, 6.
12. Коляно Ю. М., Пакула Е. А.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 11. «Наукова думка», К., 1971.
13. Коляно Ю. М., Семерак М. М.— Проблемы прочности, 1971, 8.
14. Коляно Ю. М., Семерак Ф. В.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 12. «Наукова думка», К., 1972.
15. Коляно Ю. М., Семерак Ф. В.— Проблемы прочности, 1973, 2.
16. Коляно Ю. М., Семерак Ф. В.— ФХММ, 1972, 4.
17. Коляно Ю. М., Скородинський В. А.— У кн.: Лісова, паперова і деревообробна промисловість, 8. «Будівельник», К., 1971.
18. Коляно Ю. М., Скородинский В. А.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 14. «Наукова думка», К., 1974.
19. Коляно Ю. М., Хомякевич Е. П.— В кн.: Лесное хозяйство, лесная, бумажная и деревообрабатывающая промышленность, 2. «Будівельник», К., 1973.
20. Коляно Ю. М., Хомякевич Е. П.— Тезисы докладов XIII научного совещания по тепловым напряжениям в элементах конструкций, К., 1974.
21. Коляно Ю. М., Хомякевич Е. П., Андрусив Л. П.— Тезисы докладов конференции «Проблемы нелинейных колебаний механических систем», К., 1974.
22. Коляно Ю. М., Хомякевич Е. П.— Настоящий сборник, с. 81.
23. Крылович В. И., Дербан В. И.— ИФЖ, 1972, **22**, 1.
24. Лыков А. В. Тепломассообмен. «Энергия», М., 1971.
25. Михайлов М. Д.— ИФЖ, 1969, **16**, 1.
26. Навал И. К.— Изв. АН МССР, 1972, 2.
27. Нигул У. К.— В кн.: Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. «Наука», М., 1970.
28. Нигул У. К.— В кн.: Труды симпозиума «Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах». Ч. I. Изд-во Горьковского ун-та, Горький, 1973.
29. Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.— В кн.: XIII Международный конгресс по теоретической и прикладной механике. «Наука», М., 1972.
30. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. «Мир», М., 1970.
31. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.
32. Попов Е. Б.— ПММ, 1967, **31**, 2.
33. Сабодаш П. Ф., Чебан В. Г.— Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1971, 2.

34. Семерак Ф. В.— Автореферат канд. дис., Львов, 1973.
35. Семерак Ф. В.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 1. «Наукова думка», К., 1975.
36. Скородинский В. А.— В кн.: Некоторые вопросы прикладной математики, 5. Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1971.
37. Скородинський В. А.— У кн.: Лісова, паперова і деревообробна промисловість, 8. «Будівельник», К., 1971.
38. Скородинский В. А.— Автореферат канд. дис., Львов, 1972.
39. Хомякевич Е. П.— Тезисы докладов XII Научного совещания по тепловым напряжениям в элементах конструкций, К., 1972.
40. Хомякевич Е. П.— В кн.: Аналитические методы в теории фильтрации и теплопроводности. Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1973.
41. Чебан В. Г., Сучеван В. Г.— В кн.: Прикладная математика и программирование, 5. «Штиинца», Кишинев, 1971.
42. Шачнев В. А. О новых результатах в теории сопряженной термоупругости. Приложение к книге [30].
43. Штер И. М.— ИФЖ, 1972, **23**, 3.
44. Штер И. М.— ИФЖ, 1973, **24**, 4.
45. Штер И. М.— ИФЖ, 1973, **25**, 4.
46. Энгельбрехт Ю. К.— Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук, 1973, **22**, 2.
47. Achenbach J. D.— J. Mech. Phys. Solids, 1968, **16**, 4.
48. Kaliski S.— Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn, 1965, **13**, 5.
49. Kaliski S.— Proc. of vibr. problems. Polish. Acad. Sci., 1965, **6**, 3.
50. Kaliski S., Nowacki W.—Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 1969, **17**, 6.
51. Lord H. W., Shulman Y.— J. Mech. Phys. Sol., 1967, **15**, 5.
52. Lord H. W., Lopez A. A.— Acta mechanica, 1970, **10**, 1, 2.
53. Mc. Carthy Matthew F.— Int. J. Eng. Sci., 1972, **10**, 7.
54. Nayfeh Adnan H.— Z. angew. Math. Phys., 1972, **23**, 1.
55. Norwood F. R., Warren W. E.— Ouart. J. Mech. Appl. Math., 1969, **22**, 3.
56. Singh H., Singh A.— Pure Appl. Geophys, 1972, **101**, 9.
57. Tokuoka Tatsuo.— Trans. Jap. Soc. Aeronaut. Space Sci., **16**, 32.
58. Wadhawan M. C.— Pure Appl. Geophys., 1972, **99**, 7.
59. Wadhawan M. C.— Pure Appl. Geophys., 1973, **102**, 1.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в январе 1974 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СОБСТВЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Я. И. Бурак, Б. П. Галапац, Р. А. Пеленский

В беспримесных полупроводниковых телах, которые находятся под воздействием силовых нагрузок, температурных и электромагнитных полей, наряду с процессами деформации, теплопроводности, электропроводности и поляризации необходимо учитывать процессы перехода электронов из валентной зоны в зону проводимости, вызывающие изменение концентрации свободных носителей заряда. Количественное описание названных процессов в их взаимосвязи возможно методами термодинамики неравновесных процессов на основе рассмотрения конкретных феноменологических моделей механики сплошной среды. Общие методы построения таких моделей с расширенными физико-механическими свойствами разработаны Л. И. Седовым [5, 6]. Конкретные модели неполяризованного электропроводного тела рассматривались в работах [1, 3, 4].

В настоящей работе рассмотрена простейшая модель деформируемого беспримесного изотропного полупроводника, описывающая у взаимосвязи процессы деформации, теплопроводности, электропроводности, поляризации и перехода электронов из связанного состояния в свободнсе.

Параметры термодинамического состояния модели. Уравнения состояния. Рассматривается упругий собственный полупроводник, который находится под воздействием внешних силовых нагрузок, температурных и электромагнитных полей. В естественном состоянии полупроводник изотропный, однородный и макроскопически электронейтральный.