ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИЛЬНОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. П. Бойко, М. С. Волошина, А. С. Гупало

Внутренние задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа и уравнений второго порядка эллиптического типа, когда правая часть граничного условия является обобщенной функцией, рассмотрены в работах [4, 5, 8, 9]. В этой работе рассмотрим внутреннюю и внешнюю обобщенные задачи Дирихле для сильноэллиптической системы вида

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \tag{1}$$

где A_{ij} — квадратные матрицы порядка p, $u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_p(x) \end{pmatrix}$, $A_{ij} = A_{ji} = \mathrm{const}$.

Задача Дирихле для эллиптической системы второго порядка, когда граничная функция достаточно гладкая, рассматривалась, например, в работах [7, 1].

Пусть D — область в R^n $(n \geqslant 3)$, ограниченная замкнутой поверхностью S класса C^∞; $\bar{\nu}_y$ — единичный вектор внутренней нормали к поверхности S в точке y; S_ε и $S_{-\varepsilon}$ — параллельные к S поверхности, которые находятся на расстоянии ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, вдоль положительного и отрицательного направлений внутренней нормали к S соответственно; S_ε является границей некоторой области $D_\varepsilon \subset D$, $S_{-\varepsilon}$ — области $\Omega_\varepsilon \subset \Omega = R^n \setminus \bar{D}$. Будем предполагать, что начало координат принадлежит области D. Пространство бесконечно дифференцируемых на S вектор-функций $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \ldots, \varphi_p(y))$ (основных вектор-функций) обозначим через $[D(S)]^p$, пространство линейных непрерывных функционалов над $[D(S)]^p$ (обобщенных вектор-функций $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_p \end{pmatrix}$) — через $[D'(S)]^p$. Действие обобщенной вектор-функции F на основную вектор-функцию φ обозначим через $\langle \varphi, F \rangle$:

$$\langle \varphi, F \rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle \varphi_i, F_i \rangle, \quad \varphi_i \in D(S), \; F_i \in D'(S).$$

Так как дальше p фиксировано, будем писать $D(S)$ вместо $[D(S)]^p$ и $D'(S)$ вместо $[D'(S)]^p$.

Определим на поверхности S_ε $(S_{-\varepsilon})$ основные функции следующим образом: $\varphi(x_{\pm\varepsilon}) = \varphi(y)$, если $x_{\pm\varepsilon} = y \pm \varepsilon\bar{\nu}_y$.

Внутренняя обобщенная задача Дирихле. Пусть $F \in D'(S)$. Определить в области D решение $u(x)$ системы (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} \varphi(x)\, u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = \langle \varphi, F \rangle \tag{2}$$

для каждой $\varphi \in D(S)$.

Внешняя обобщенная задача Дирихле. Пусть $F \in D'(S)$. Определить в области Ω решение $u(x)$ системы (1), стремящееся к нулю на бесконечности и удовлетворяющее условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon})\, u(x_{-\varepsilon})\, dS_{-\varepsilon} = \langle \varphi, F \rangle \tag{3}$$

для каждой $\varphi \in D(S)$.

Пусть $\omega_0(x, y)$ — нормальная фундаментальная матрица системы (1). Существование и свойства ее доказаны в работе [6]. Ядро $G_0(x, y)$ потенциала задачи Дирихле для системы (1) представляется в виде

$$G_0(x, y) = -2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \omega_0(x, y)}{\partial y_i} \widetilde{A}_{ij} \nu_j(y). \tag{4}$$

Представление матрицы $G_0(x, y)$ в виде (4) и ее свойства рассмотрены в работе [2]. Здесь $\widetilde{A}_{ij} + \widetilde{A}_{ji} = 2A_{ij}$, $\widetilde{A}_{ij} = \widetilde{A}'_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\widetilde{A}_{ij}$ определяются единственным образом [2]. Отметим еще некоторые свойства матрицы $G_0(x, y)$.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi \in D(S)$, *тогда равномерно относительно* $y \in S$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_{\pm\varepsilon}} \varphi(x_{\pm\varepsilon}) G_0(x_{\pm\varepsilon}, y)\, dS_{\pm\varepsilon} = \pm \varphi(y) + \int_S \varphi(x) G_0(x, y)\, dS.$$

Лемма 2. *Оператор* $(B\varphi)(x_0) \equiv \int_S \varphi(y) G_0(y, x_0)\, dS_y$, $x_0 \in S$, *действует в* $D(S)$.

Доказательство. Пусть $w(x) = 2\int_S \varphi(y) \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \omega_0(x, y)}{\partial y_i} \widetilde{A}_{ij} \nu_j(x_0)\, dS_y$.

Очевидно, что при $x \in D$ $w(x) \in C^\infty(D)$ и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k w(x) = 2\int_S \varphi(y) \sum_{i,j=1}^{n} \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \frac{\partial}{\partial y_i} \omega_0(x, y) \widetilde{A}_{ij} \nu_j(x_0)\, dS_y. \tag{5}$$

Пусть $\{U_j\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ — конечное покрытие области $\overline{D}$, $U_j \subset R^n$. В каждой граничной окрестности $U_j (j = 1, \ldots, l \leqslant m)$ можно перейти к локальной системе координат $\xi = (\xi', \xi_n)$ такой, что ось ξ_n направлена по внутренней нормали к $U_j \cap S$ в некоторой ее точке. Любую производную по y можно представить в виде

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)^k = \sum_{0 \leqslant r \leqslant |k|} l_{k,r} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^r, \tag{6}$$

где $l_{k,r}$ — «касательные» дифференциальные операторы, т. е. операторы, в которые входят производные только по $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. В локальной системе координат

$$A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = L(\xi', \xi_n) \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} + M\left(\xi', \xi_n, \frac{\partial}{\partial \xi'}\right) \frac{\partial}{\partial \xi_n} + N\left(\xi', \xi_n, \frac{\partial}{\partial \xi'}\right),$$

где $L(\xi', \xi_n)$ — матрица порядка p, $M\left(\xi', \xi_n, \frac{\partial}{\partial \xi'}\right)$ и $N\left(\xi', \xi_n, \frac{\partial}{\partial \xi'}\right)$ — «касательные» дифференциальные матричные операторы. В силу сильной эллиптичности системы (1), отсюда определяем

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} = \widetilde{L}(\xi', \xi_n) A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \widetilde{M}\left(\xi', \xi_n, \frac{\partial}{\partial \xi'}\right) \frac{\partial}{\partial \xi_n} + \widetilde{N}\left(\xi', \xi_n, \frac{\partial}{\partial \xi'}\right).$$

Дифференцируя последнее равенство $r-2$ раза по ξ_n и учитывая выражение для $\frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2}$, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^r = \widetilde{L}_r A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \widetilde{M}_r \frac{\partial}{\partial \xi_n} + \widetilde{N}_r.$$

Подставляя $\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^r$ в выражение (6), получаем представление производной $\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)^k$ в виде

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)^k = L_k A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + M_k \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}_y} + N_k,$$

где M_k, N_k — «касательные» матричные дифференциальные операторы, определенные в каждой граничной окрестности U_j, $j=1, \ldots, l$. Нетрудно показать, что они не зависят от выбора локальной системы координат. Тогда по этим операторам можем построить операторы Q_k, P_k, R_k, определенные уже на всем многообразии S, так что

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)^k = Q_k A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + P_k \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}_y} + R_k$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k w(x) = 2\sum_{i,j=1}^{n} \int_S \varphi(y)\Big[Q_{k+l_i} A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + P_{k+l_i}\frac{\partial}{\partial \bar{\nu}_y} +$$

$$+ R_{k+l_i}\Big]\omega_0(x, y)\tilde{A}_{ij}\nu_j(x_0)\, dS_y =$$

$$= 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_S \varphi(y) P_{k+l_i}\frac{\partial}{\partial \bar{\nu}_y}\omega_0(x, y)\tilde{A}_{ij}\nu_j(x_0)\, dS_y +$$

$$+ 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_S \varphi(y) R_{k+l_i}\omega_0(x, y)\tilde{A}_{ij}\nu_j(x_0)\, dS_y,$$

$$l_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0).$$

Отметим, что $P_{k+l_i} = \sum_{|q|=0}^{|k|} P_{k+l_i,q}\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^q$, $R_{k+l_i} = \sum_{|q|=0}^{|k|+1} R_{k+l_i,q}\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^q$, где $P_{k+l_i,q}$ и $R_{k+l_i,q}$ $(k = 0, 1, \ldots;\ i = 1, \ldots, n)$ — матрицы порядка p. Известно, что для каждого оператора дифференцирования $\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^q$ существует оператор $\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{q^*}$ такой, что

$$\int_S \mu(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^q \chi(\xi)\, dS_{\xi'} = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{q^*}\mu(\xi)\,\chi(\xi)\, dS_{\xi'} \tag{7}$$

для произвольных скалярных функций $\mu(\xi)$, $\chi(\xi)$, $q = 0, 1, \ldots$. Оператор $\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{q^*}$ будем называть сопряженным к оператору дифференцирования $\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^q$. Легко видеть, что формула (7) имеет место и тогда, когда $\mu(\xi)$ и $\chi(\xi)$ — матрицы. Тогда, согласно правилу дифференцирования произведения матриц, используя существование сопряженных в смысле (7) операторов, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k w(x) =$$

$$= 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_S \varphi(y)\sum_{|q|=0}^{|k|} P_{k+l_i,q}\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^q \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}_y}\omega_0(x, y)\tilde{A}_{ij}\nu_j(x_0)\, dS_y +$$

$$+ 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_S \varphi(y)\sum_{|q|=0}^{|k|+1} R_{k+l_i,q}\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^q \omega_0(x, y)\tilde{A}_{ij}\nu_j(x_0)\, dS_y =$$

$$= 2\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{|q|=0}^{|k|}\int_S \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{q^*}[\varphi(y) P_{k+l_i,q}]\frac{\partial}{\partial \bar{\nu}_y}\omega_0(x, y)\tilde{A}_{ij}\nu_j(x_0)\, dS_y +$$

$$+ 2\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{|q|=0}^{|k|+1}\int_S \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{q^*}[\varphi(y) R_{k+l_i,q}]\,\omega_0(x, y)\tilde{A}_{ij}\nu_j(x_0)\, dS_y.$$

По свойствам матрицы $\omega_0(x, y)$ отсюда следует, что для произвольного натурального числа $|k|$ и функции $\varphi \in D(S)$ существует $\lim\limits_{x \to x_0 \in S} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k w(x)$, что и требовалось доказать.

Легко видеть, что имеет место следующая лемма (аналог теоремы Фубини).

Лемма 3. *Пусть $F \in D'(S)$, $\varphi \in D(S)$, $f(x_{\pm\varepsilon}, y)$ — матрица с элементами из $D(S_{\pm\varepsilon} \times S)$, тогда*

$$\int\limits_{S_{\pm\varepsilon}} \varphi(x_{\pm\varepsilon}) \langle f(x_{\pm\varepsilon}, y), F\rangle \, dS_{\pm\varepsilon} = \left\langle \int\limits_{S_{\pm\varepsilon}} \varphi(x_{\pm\varepsilon}) f(x_{\pm\varepsilon}, y) \, dS_{\pm\varepsilon}, F \right\rangle.$$

Лемма 4. *Преобразование*

$$\langle g, T\rangle = \langle \varphi_g, F\rangle, \tag{8}$$

где $g \in D(S)$, φ_g — решение системы интегральных уравнений

$$\varphi(y) + \int\limits_S \varphi(x) G_0(x, y) \, dS_x = g(y), \tag{9}$$

определяет изоморфизм пространства $D'(S)$ на себя. Обратное преобразование определяется следующим образом:

$$\langle \varphi, F\rangle = \left\langle \varphi(y) + \int\limits_S \varphi(x) G_0(x, y) \, dS_x, T \right\rangle$$

для каждой функции $\varphi \in D(S)$.

Лемма 5. *Преобразование*

$$\langle g, R\rangle = \langle \psi_g, F\rangle, \tag{10}$$

где $g \in D(S)$, ψ_g — решение системы интегральных уравнений

$$-\psi(y) + \int\limits_S \psi(x) G_0(x, y) \, dS_x = g(y) - C_g, \tag{11}$$

$$C_g = \frac{1}{\sigma} \int\limits_S g(y) \, dS_y,$$

σ — площадь поверхности S, определяет изоморфизм пространств $V'(S) = \{V \in D'(S) : \langle \psi_0, V\rangle = 0\}$ и $W'(S) = \{W \in D'(S) : \langle C, W\rangle = 0\}$. Обратное преобразование определяется следующим образом:

$$\langle \psi, F\rangle = \left\langle -\psi(y) + \int\limits_S \psi(x) G_0(x, y) \, dS_x, R \right\rangle$$

для каждой функции $\psi \in D(S)$.

Утверждения лемм 4 и 5 следуют из леммы 2 и свойств решений систем (9) и (11) соответственно.

Теорема 1. *Пусть $F \in D'(S)$, обобщенная функция T определяется согласно (7) и (8), тогда*

$$u(x) = \langle G_0(x, y), T\rangle, \qquad x \in D, \ y \in S \tag{12}$$

является решением внутренней обобщенной задачи Дирихле.

Доказательство. Так как столбцы матрицы $G_0(x, y)$ являются решениями системы (1),

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = \left\langle A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) G_0(x, y), T \right\rangle = \langle 0, T\rangle = 0,$$

поэтому достаточно доказать, что выражение (12) удовлетворяет условию (2). Используя леммы 1—4, получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) \, dS_\varepsilon = \left\langle \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) G_0(x_\varepsilon, y) \, dS_\varepsilon, T \right\rangle =$$

$$= \left\langle \varphi(y) + \int\limits_S \varphi(x) G_0(x, y) \, dS_x, T \right\rangle = \langle \varphi, F\rangle$$

для каждой функции $\varphi \in D(S)$.

Теорема 2. *Пусть $F \in V'(S)$, обобщенная функция R определяется по лемме 5, тогда*

$$u(x) = \langle G_0(x, y), R \rangle, \qquad x \in \Omega, \ y \in S$$

является решением внешней обобщенной задачи Дирихле.

Теорема 3. *Пусть $F \in D'(S)$, обобщенная функция R определяется следующим образом:*

$$\langle g, R \rangle = \langle \psi_g, F \rangle - \langle \psi_0, F \rangle \int_S \psi_g(x) \tilde{\omega}_0(x, 0)\, dS_x,$$

где $g \in D(S)$, ψ_g — решение системы интегральных уравнений (11), *$\tilde{\omega}_0(x, 0)$ — некоторый столбец фундаментальной матрицы $\omega_0(x, 0)$, тогда*

$$u(x) = \langle G_0(x, y), R \rangle + \langle \psi_0, F \rangle \tilde{\omega}_0(x, 0), \qquad x \in \Omega, \ y \in S$$

является решением внешней обобщенной задачи Дирихле.

Теоремы 2 и 3 доказываются аналогично теореме 1 с помощью лемм 1, 2, 3 и 5.

Теорема 4. *Решение внутренней обобщенной задачи Дирихле единственно.*

Доказательство. Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$ — два решения задачи. Тогда $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ является решением системы (1) и удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = 0,$$

или, после преобразования $x_\varepsilon = y + \varepsilon \bar{\nu}_y$ с якобианом $J_\varepsilon(y)$, условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_S \varphi(y) u_\varepsilon(y)\, dS_y = 0 \tag{13}$$

для каждой функции $\varphi \in D(S)$. Здесь $u_\varepsilon(y) = u(y + \varepsilon \bar{\nu}_y) J_\varepsilon(y)$. Согласно [1], каждое решение системы (1) в области D_ε можно представить в виде

$$u(z) = \int_{S_\varepsilon} G_0(z, y_\varepsilon) \mu(y_\varepsilon)\, dS_\varepsilon, \qquad z \in D_\varepsilon, \tag{14}$$

где $\mu(y_\varepsilon) = \begin{pmatrix} \mu_1(y_\varepsilon) \\ \vdots \\ \mu_p(y_\varepsilon) \end{pmatrix}$ — решение системы интегральных уравнений

$$\mu(x_\varepsilon) + \int_{S_\varepsilon} G_0(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \mu(y_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = u(x_\varepsilon). \tag{15}$$

Подставляя решение системы (15) в (14), получаем

$$u(z) = \int_S \Phi_\varepsilon(z, y) u_\varepsilon(y)\, dS_y, \qquad z \in D_\varepsilon, \tag{16}$$

где

$$\Phi_\varepsilon(z, y) = G_0(z, y + \varepsilon \bar{\nu}_y) - \int_{S_\varepsilon} G_0(z, x_\varepsilon) \Gamma_0(x_\varepsilon, y + \varepsilon \bar{\nu}_y)\, dS_\varepsilon,$$

$\Gamma_0(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ — резольвента ядра системы (15).

По свойствам матриц $G_0(x, y)$ и $\Gamma_0(x, y)$ выражение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_\varepsilon(z, y) = \Phi(z, y)$$

равномерно относительно z. Тогда из леммы (см. [3, с. 95]) и выражений (13), (16) следует, что $u(z) \equiv 0$, $z \in D$.

Теорема 5. *Решение внешней обобщенной задачи Дирихле единственно.*

Теорема доказывается аналогично теореме 4, учитывая поведение решения на бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волошина М. С. Некоторые граничные задачи для сильноэллиптических систем второго порядка. Автореферат канд. дис., Львов, 1959.
2. Волошина М. С.— ДАН УРСР, 1958, 9.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз, М., 1958.
4. Гупало Г. С.— ДАН УРСР, 1966, 7.
5. Гупало Г. С.— Вісн. Львівського ун-ту. Сер. мех.-мат., 1969, 4.
6. Лопатинский Я. Б.— УМЖ, 1951, 1.
7. Лопатинський Я. Б.— ДАН УРСР, 1956, 1.
8. Рогожин В. С., Данко С. П.— Дифференциальные уравнения, 1971, 7, 3.
9. Szmydt Z.— Mat. natur., 1962, 33, 6.

Львовский государственный университет,
Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕРМОМЕХАНИКА
(обзор)

Ю. М. Коляно

В последние годы все интенсивней развивается новое научное направление в термомеханике — исследование динамических процессов в анизотропных и изотропных телах с учетом конечной скорости распространения тепла (КСРТ) c_q [7, 27, 42].

Вводя в принцип Онзагера характеристику скорости изменения теплового потока q_i — тепловую инерцию $\tau_r \frac{\partial q_i}{\partial \tau}$ [52] (τ_r — время релаксации теплового потока) С. Калиский [48] получил обобщенный закон теплопроводности анизотропных тел в виде

$$\lambda_{ij}t_j = lq_i, \qquad l = 1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{1}$$

Учитывая члены, появляющиеся в уравнении теплопроводности и в граничных условиях теплообмена, полученных на основе этого закона, а также инерционные члены в уравнениях равновесия, приходим к новой теории динамической термомеханики, получившей название обобщенной [42]. Динамические задачи термомеханики, решаемые на основе уравнений этой теории, в отличие от классических задач, не учитывающих влияния тепловой инерции, будем называть обобщенными [10].

Обобщенная термоупругость пространственных тел. Обоснование обобщенного закона теплопроводности для изотропных тел и полученного на его основе уравнения теплопроводности гиперболического типа наиболее полно представлено в работе [2]. А. В. Лыков [24], проанализировав обобщенную задачу теплопроводности для полупространства, граничное значение температуры которого изменяется в начальный момент времени τ на некоторую величину, оставаясь далее постоянным, дал обоснование физического смысла КСРТ, представляющей собой производную по времени от глубины проникновения тепла

$$c_q = \frac{d\left(\tau \sqrt{\frac{a}{\tau_r}}\right)}{d\tau} = \sqrt{\frac{a}{\tau_r}}, \tag{2}$$

где a — коэффициент температуропроводности. Поскольку для металлов $\tau_r \approx 10^{-11}$ *сек* [24], то для стали $c_q = 1800$ *м/сек*, для алюминия $c_q = 2930$ *м/сек*.

Основные уравнения взаимосвязанной обобщенной динамической задачи линейной термоупругости анизотропных тел имеют вид [10,34]

$$c_{ijkl}u_{k,lj} + X_i = \rho \ddot{u}_i + \beta_{ij}\theta_j, \tag{3}$$

$$\lambda_{ij}\theta_{ij} = l\,(c\dot{\theta} + t_0\beta_{ij}\dot{e}_{ij} + w), \tag{4}$$

где λ_{ij} — коэффициенты теплопроводности; c — обьемная теплоемкость;