Замечание. Результаты, сформулированные теоремами 4 и 5, относятся к уравнению

$$X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \cdots + X A_{s-1} + A_s = 0$$

и получены в основном благодаря исследованию свойств левых линейных делителей матричного многочлена $A(x)$. Аналогичные результаты можно получить относительно уравнения вида

$$A_0 X^s + A_1 X^{s-1} + \cdots + A_{s-1} X + A_s = 0. \tag{26}$$

Для этого нужно исследовать условия выделяемости линейного множителя из матричного многочлена $A(x)$ справа. Изменения, которые нужно сделать в рассуждениях, очевидны. Так, например, вместо матрицы $A_2(x)$, которая вводится леммой 4, следует рассматривать матрицу

$$\left\| \begin{matrix} E \\ Ex \end{matrix} \right\| A_*(x),$$

а вместо матрицы $M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}]$, которая вводится определением 1, следует рассматривать матрицу

$$N_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}] =$$
$$= \| A_*(\alpha_1) A_*'(\alpha_1) \ldots A_*^{(k_1-1)}(\alpha_1) A_*(\alpha_2) A_*'(\alpha_2) \ldots A_*^{(k_2-1)}(\alpha_2) \ldots$$
$$\ldots A_*(\alpha_i) A_*'(\alpha_i) \ldots A_*^{(k_i-1)}(\alpha_i) \|,$$

т. е. для получения матрицы, соответствующей некоторому подмножеству выделенных корней, блоки (при подстановке корней) нужно размещать не вертикально, а горизонтально. Еще проще, воспользовавшись операцией транспонирования, свести случай уравнения (26) к предшествующему.

**Следствие 3.** Если матрица $B$ является решением матричного уравнения (1), причем $K \cap (K_{A(x)} \setminus K) \subseteq S^{(n-1)}$, где $K$ — множество всех характеристик корней (с учетом кратности) матрицы $B$, то это решение единственно.

**Следствие 4.** Если уравнение $\det A(x) = 0$ имеет лишь простые корни, то всякое решение уравнения (1) с определенным множеством характеристических чисел единственно.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Физматгиз, М.— Л., 1954.
2. Казимирский П. С.— УМЖ, 1965, 5, 115.
3. Казимирский П. С.— УМЖ, 1972, 24, 3, 316.
4. Казимирский П. С. — Вісн. Львівського політехнічного ін-ту, 1965, 8.



Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР



Поступила в редколлегию в сентябре 1973 г.


# ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ВИДЕ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ


**П. И. Боднарчук, Х. И. Кучминская**


Понятие ветвящейся цепной дроби играет по отношению к функциям многих переменных такую же роль, как обыкновенная цепная дробь по отношению к функции одного переменного. Вследствие этого возникает задача аппроксимации функций с многими аргументами ветвящимися цепными дробями.

В работах [2—4] получены интерполяционная и функциональная формулы Тиле в виде обычной цепной дроби, основная идея которых состоит в построении обратных разностей и обратных производных функции. Ниже предлагается интерполяционная и функциональная формулы для функции многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде ветвящейся цепной дроби и находится вид остаточного члена интерполяционной формулы.

Пусть задана функция $n$ переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что $P_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$, $i = \overline{1, N}$ — заданные точки $n$-мерного пространства, а $P = (x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная, но фиксированная точка этого пространства.

**Определение 1.** Частными обратными разностями первого порядка ${}_{x_k}\rho_1(P, P_1)$ по аргументам $x_k$, $k = \overline{1, n}$, называются соотношения

$$ {}_{x_k}\rho_1(P, P_1) = \frac{x_k - x_k^1}{f(x_1^1, \ldots, x_{k-1}^1, x_k, \ldots, x_n) - f(x_1^1, \ldots, x_k^1, x_{k+1}, \ldots, x_n)}. \tag{1} $$

Очевидно, что

$$ {}_{x_k}\rho_1(P, P_1) \neq {}_{x_k}\rho_1(P_1, P). $$

**Определение 2.** Частными обратными разностями второго порядка ${}_{x_{k_2}x_{k_1}}\rho_2(P, P_2, P_1)$ по аргументам $x_{k_2}$, $k_2 = \overline{1, n}$, называются соотношения

$$ {}_{x_{k_2}x_{k_1}}\rho_2(P, P_2, P_1) = f(P_1) + \frac{x_{k_2} - x_{k_2}^2}{{}_{x_{k_1}}\rho_1\left(\dfrac{P_2, P_1}{\dfrac{k_2 - 1}{P, P_1}}\right) - {}_{x_{k_1}}\rho_1\left(\dfrac{P_2, P_1}{\dfrac{k_2}{P, P_1}}\right)}, \tag{2} $$

где $k_1, k_2 = \overline{1, n}$, а также приняты условные обозначения

$$ {}_{x_{k_1}}\rho_1\begin{bmatrix} x_1^1, x_1^2 \\ \cdots\cdots \\ x_{k_2-1}^1, x_{k_2-1}^2 \\ x_{k_2}, x_{k_2}^1 \\ \cdots\cdots \\ x_n, x_n^1 \end{bmatrix} = {}_{x_{k_1}}\rho_1\left(\dfrac{P_1, P_2}{\dfrac{k_2 - 1}{P, P_1}}\right); \quad {}_{x_{k_1}}\rho_1\begin{bmatrix} x_1^1, x_1^2 \\ \cdots\cdots \\ x_{k_2}^1, x_{k_2}^2 \\ x_{k_2+1}, x_{k_2+1}^1 \\ \cdots\cdots \\ x_n, x_n^1 \end{bmatrix} = $$

$$ = {}_{x_{k_1}}\rho_1\left(\dfrac{P_1, P_2}{\dfrac{k_2}{P, P_1}}\right). $$

Очевидно, что

$$ {}_{x_{k_2}x_{k_1}}\rho_2(P, P_1, P_2) \neq {}_{x_{k_2}x_{k_1}}\rho_2(P_1, P_2, P). $$

**Определение 3.** Частными обратными разностями $m$-го порядка ${}_{x_{k_m}x_{k_{m-1}}\ldots x_{k_1}}\rho_m(P, P_1, \ldots, P_m)$ по аргументам $x_{k_m}$, $k_m = \overline{1, n}$, при известных и существующих частных обратных разностях до порядка $(m-1)$-го включительно $(m \leqslant N)$ называются соотношения

$$ {}_{x_{k_m}x_{k_{m-1}}\ldots x_{k_1}}\rho_m(P, P_m, \ldots, P_1) = {}_{x_{k_{m-2}}\ldots x_{k_1}}\rho_{m-2}(P_{m-1}, \ldots, P_1) + $$

$$ + \frac{x_{k_m} - x_{k_m}^m}{{}_{x_{k_{m-1}}\ldots x_{k_1}}\rho_{m-1}\left(\dfrac{P_m, P_{m-1}, \ldots, P_1}{\dfrac{k_m - 1}{P, P_{m-1}, \ldots, P_1}}\right) - {}_{x_{k_{m-1}}\ldots x_{k_1}}\rho_{m-1}\left(\dfrac{P_m, P_{m-1}, \ldots, P_1}{\dfrac{k_m}{P, P_{m-1}, \ldots, P_1}}\right)}, \tag{3} $$

где $k_i = \overline{1, n}$; $i = \overline{1, m}$, а также принято условное обозначение

$$x_{k_{m-1}} \ldots x_{k_1}\rho_{m-1}\left(\frac{P_1, \ldots, P_m}{\frac{k_m - 1}{P, P_1, \ldots, P_{m-1}}}\right) =$$

$$= x_{k_{m-1}} \ldots x_{k_1}\rho_{m-1}\begin{bmatrix} x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k_m-1}^1, x_{k_m-1}^2, \ldots, x_{k_m-1}^m \\ x_{k_m}, x_{k_m}^1, \ldots, x_{k_m}^{m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n, x_n^1, \ldots, x_n^{m-1} \end{bmatrix}.$$

Кроме того,

$$x_{k_m} \ldots x_{k_1}\rho_m(P, \ldots, P_m) \neq x_{k_m} \ldots x_{k_1}\rho_m(P_m, P, \ldots, P_{m-1}).$$

Исходя из приведенных определений, обосновывается интерполяционная формула для функции многих переменных в виде ветвящейся цепной дроби [1]. Интерполяционная формула для $N$ узлов интерполяции $P_i$, $i = \overline{1, N}$, функции $n$ аргументов $f(P)$ имеет вид

$$f(P) = f(P_1) + \sum_{k_1=1}^{n} \frac{x_{k_1} - x_{k_1}^1 \mid}{\mid x_{k_1}\rho_1(P_2, P_1)} + \sum_{k_2=1}^{n} \frac{x_{k_2} - x_{k_2}^2 \mid}{\mid x_{k_2}x_{k_1}\rho_2(P_3, P_2, P_1) - f(P_1)} + \cdots +$$

$$+ \sum_{k_N=1}^{n} \frac{x_{k_N} - x_{k_N}^N \mid}{\mid x_{k_N} \ldots x_{k_1}\rho_N(P, P_N, \ldots, P_1) - x_{k_{N-2}} \ldots x_{k_1}\rho_{N-2}(P_{N-1}, \ldots, P_1)}. \quad (4)$$

Проиллюстрируем образование первого этажа данной ветвящейся цепной дроби (4). Из соотношений (1) находим

$$f(x_1^1, \ldots, x_{k_1-1}^1, x_{k_1}, \ldots, x_n) = f(x_1^1, \ldots, x_{k_1}^1, x_{k_1+1}, \ldots, x_n) + \frac{x_k - x_k^1}{x_k\rho_1(P, P_1)}. \quad (5)$$

Поскольку $k = \overline{1, n}$, то запишем соотношение (5) при каждом из возможных значений $k$. В результате получим

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1^1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{x_1 - x_1^1}{x_1\rho_1(P, P_1)},$$

$$f(x_1^1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1^1, x_2^1, x_3, \ldots, x_n) + \frac{x_2 - x_2^1}{x_2\rho_1(P, P_1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n-1}^1, x_n) = f(x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1, x_n^1) + \frac{x_n - x_n^1}{x_n\rho_1(P, P_1)}.$$

Складывая почленно эти равенства, получаем конечно-разностный аналог в обратных разностях формулы конечных приращений

$$f(P) = f(P_1) + \sum_{k_1=1}^{n} \frac{x_{k_1} - x_{k_1}^1}{x_{k_1}\rho_1(P, P_1)}. \quad (6)$$

При $P = P_1$ равенство (6) преобразовывается в тождество $f(P_1) \equiv f(P_1)$, а также равенство (6) преобразовывается в тождество и в произвольной точке $P = P_i$. Действительно,

$$f(P_i) = f(P_1) + \sum_{k_1=1}^{n} \frac{x_{k_1}^i - x_{k_1}^1}{x_{k_1}\rho_1(P_i, P_1)},$$

а

$$ {}_{x_{k_1}}\rho_1(P_i, P_1) = \frac{x_{k_1}^i - x_{k_1}^1}{f(x_1^1, \ldots, x_{k_1-1}^1, x_{k_1}^i, \ldots, x_n^i) - f(x_1^1, \ldots, x_{k_1}^1, x_{k_1+1}^i, \ldots, x_n^i)}, $$

т. е.

$$ f(P_i) = f(P_1) + \sum_{k_1=1}^{n} [f(x_1^1, \ldots, x_{k_1-1}^1, x_{k_1}^i, \ldots, x_n^i) - $$

$$ - f(x_1^1, \ldots, x_{k_1}^1, x_{k_1+1}^i, \ldots, x_n^i)] = f(P_1) + f(P_i) - f(P_1) = f(P_i). $$

Следовательно, равенство (6) — тождество.

Предположим, что задана дифференцируемая функция $n$ переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в области $\{a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1;\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2;\ \ldots;\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}$. Положим $b_i - a_i = h_i$, $i = \overline{1, n}$, и рассмотрим функцию

$$ f(t) = f(a_1 + h_1 t;\ a_2 + h_2 t;\ \ldots;\ a_n + h_n t), $$

$$ t = \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n}, $$

одной переменной на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Предположим, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет все частные производные до порядка $N$ включительно. Представим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в виде

$$ f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{A_N(x_1, \ldots, x_n)}{B_N(x_1, \ldots, x_n)} + R_N(x_1, \ldots, x_n), \tag{7} $$

где $A_N(x_1, \ldots, x_n)$, $B_N(x_1, \ldots, x_n)$ — соответственно числитель и знаменатель $N$-й подходящей дроби ветвящейся цепной дроби, представляющей функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в силу формулы (4), а $R_N(x_1, \ldots, x_n)$ — остаточный член или погрешность этой формулы.

Остаточный член формулы (4) ищем в виде

$$ R_N(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{B_N^2(x_1, \ldots, x_n)} S(x_1, \ldots, x_n), \tag{8} $$

где

$$ S(x_1, \ldots, x_n) = $$

$$ = \sum_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = N} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \prod_{i_1=1}^{\alpha_1} (x_1 - x_1^{i_1}) \prod_{i_2=1}^{\alpha_2} (x_2 - x_2^{\alpha_1 + i_2}) \ldots \prod_{i_n=1}^{\alpha_n} (x_n - x_n^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} + i_n}). \tag{9} $$

Рассмотрим функции одного аргумента $\bar{f}(t)$, $\bar{A}_N(t)$, $\bar{B}_N(t)$, $\bar{R}_N(t)$, $\bar{S}(t)$, а также следующее соотношение:

$$ \omega(t) = \bar{f}(t) \bar{B}_N^2(t) - \bar{A}_N(t) \bar{B}_N(t) - \bar{S}(t). \tag{10} $$

Заметим, что

$$ \bar{S}(t) = \sum_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = N} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} (t - t_1) \ldots (t - t_N) \tag{11} $$

ил

$$ \bar{S}(t) = \bar{\lambda}(\lambda)(t - t_1) \ldots (t - t_N), \tag{12} $$

где

$$ \bar{\lambda}(\lambda) = \sum_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = N} \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n}. \tag{13} $$

Следовательно,

$$ \omega(t) = \bar{f}(t) \bar{B}_N^2(t) - \bar{A}_N(t) \bar{B}_N(t) - \bar{\lambda}(\lambda)(t - t_1) \ldots (t - t_N). \tag{14} $$

Соотношение (14) являет собой сложную функцию переменной $t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, обращающуюся в нуль при $t = t_1, t_2, \ldots, t_N$, а также при $t = t_0$ в силу соотношений (7) и (12). Тогда по обобщенной теореме Ролля $\omega^{(N)}(t)$ имеет хотя бы один нуль на интервале (0. 1) при $t = \eta$. Значит,

$$\omega^{(N)}(\eta) = [\bar{f}(\eta)\,\bar{B}_N^2(\eta) - \bar{A}_N(\eta)\,\bar{B}_N(\eta)]^{(N)} - \bar{\lambda}(\lambda)\,N! = 0,$$

т. е.

$$\bar{\lambda}(\lambda) = \frac{1}{N!}[\bar{f}(\eta)\,\bar{B}_N^2(\eta) - \bar{A}_N(\eta)\,\bar{B}_N(\eta)]^{(N)}.$$

Возвращаясь к $n$ переменным, получим тождество

$$\sum_{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=N} \lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_n} h_1^{\alpha_1}\ldots h_n^{\alpha_n} \equiv \frac{1}{N!}\sum_{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=N} C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} h_1^{\alpha_1}\ldots h_n^{\alpha_n}\times$$

$$\times\frac{\partial^N[f(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,B_N^2(\xi_1,\ldots,\xi_n) - A_N(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,B_N(\xi_1,\ldots,\xi_n)]}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\ldots\partial\xi_n^{\alpha_n}},$$

где $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — некоторая промежуточная точка рассматриваемого пространства, являющаяся внутренней. Следовательно, получим

$$\lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \frac{1}{N!}C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\frac{\partial^N\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\ldots\partial\xi_n^{\alpha_n}}, \tag{15}$$

где

$$C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \frac{N!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!},$$

$$\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n) \equiv$$

$$\equiv [f(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,B_N(\xi_1,\ldots,\xi_n) - A_N(\xi_1,\ldots,\xi_n)]\,B_N(\xi_1,\ldots,\xi_n).$$

Получена формула остаточного члена

$$R_N(x_1,\ldots,x_n) = \frac{S(x_1,\ldots,x_n)}{B_N^2(x_1,\ldots,x_n)}, \tag{16}$$

где коэффициенты функции $S(x_1, \ldots, x_n)$ вычисляются по формулам (15).

В случае функции одной переменной формула (16) дает известную формулу остаточного члена формулы Тиле [3].

Функциональный аналог формулы (4) получим, перейдя в интерполяционной формуле (4) к пределу при $P_k \to P$, $k = \overline{1, N}$. Переходя к пределу при $P_k \to P$, $k = \overline{1, N}$, в формулах (1) — (3), получаем в результате выражения для обратных слитых частных производных функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

**Определение 4.** Обратной частной производной $m$-го порядка функции $f(x_1, \ldots, x_n) = f(P)$ называется выражение

$$\overset{(m)}{x_{k_m}\ldots x_{k_1}} f(P) = \lim_{P_k\to P} x_{k_m}\ldots x_{k_1}\rho_m(P, P_m, \ldots, P_1) = x_{k_m}\ldots x_{k_1}\rho_m(P, \ldots, P),$$

$$k_i = \overline{1, n};\ i = \overline{1, m}.$$

Тогда

$$\overset{'}{x_{k_1}} f(P) = \lim_{P_1\to P} x_{k_1}\rho_1(P, P_1) =$$

$$= \lim_{P_1\to P}\frac{x_{k_1} - x_{k_1}^1}{f(x_1^1, \ldots, x_{k_1-1}^1, x_{k_1}, \ldots, x_n) - f(x_1^1, \ldots, x_{k_1}^1, x_{k_1+1}, \ldots, x_n)} =$$

$$= \frac{1}{f'_{x_{k_1}}(P)},$$

т. е.

$$ {}'_{x_{k_1}}f(P) = \frac{1}{f'_{x_{k_1}}(P)}, \qquad k_1 = \overline{1, n}. \tag{17} $$

Аналогично из формулы (3) получаем

$$ \left({}^{(m-1)}_{x_{k_{m-1}}\ldots x_{k_1}}f(P)\right)'_{x_{k_m}} = \lim_{P_1 \to P} \frac{{}_{x_{k_{m-1}}\ldots x_{k_1}}\rho_{m-1}(P_1, \ldots, P_1) - {}_{x_{k_{m-1}}\ldots x_{k_1}}\rho_{m-1}(P, \ldots, P)}{x^1_{k_m} - x_{k_m}} = $$

$$ = \frac{m}{{}^{(m)}_{x_{k_m}\ldots x_{k_1}}f(P) - {}^{(m-2)}_{x_{k_{m-2}}\ldots x_{k_1}}f(P)}, $$

т. е. получаем рекуррентную формулу

$$ {}^{(m)}_{x_{k_m}\ldots x_{k_1}}f(P) = {}^{(m-2)}_{x_{k_{m-2}}\ldots x_{k_1}}f(P) + m'_{x_{k_m}}\left({}^{(m-1)}_{x_{k_{m-1}}\ldots x_{k_1}}f(P)\right). \tag{18} $$

Совершив предельный переход в формуле (4) при условии, что $P$ — произвольная точка, а $P_i \to P_0$, $i = \overline{1, N}$, где $P_0$ — некоторая фиксированная точка, получим

$$ f(P) = f(P_0) + \sum_{k_1=1}^{n} \frac{x_{k_1} - x^0_{k_1} |}{| {}'_{x_{k_1}}[f(P)]_{P=P_0}} + \sum_{k_2=1}^{n} \frac{x_{k_2} - x^0_{k_2} |}{| 2'_{x_{k_2}}[{}'_{x_{k_1}}f(P)]_{P=P_0}} + \cdots + $$

$$ + \sum_{k_N=1}^{n} \frac{x_{k_N} - x^0_{k_N} |}{| N'_{x_{k_N}}[{}^{(N-1)}_{x_{k_{N-1}}\ldots x_{k_1}}f(P)]_{P=P_0}} + \cdots \tag{19} $$

Формула (19) верна в окрестности точки $P = P_0$ при условии существования обратных частных производных данной функции достаточно высоких порядков.

Пример. Разложив в ветвящуюся цепную дробь по формуле (19) функцию $\sqrt{xy}$ в окрестности точки $P_0 = (1,1)$, получим

$$ \sqrt{xy} = 1 + \cfrac{x-1}{2 + \cfrac{x-1}{2 + \cfrac{x-1}{2+\vdots} + \cfrac{y-1}{2+\vdots}} + \cfrac{y-1}{-2 + \cfrac{x-1}{2+\vdots} + \cfrac{y-1}{-\frac{6}{5}+\vdots}}} + $$

$$ + \cfrac{y-1}{2 + \cfrac{x-1}{-2 + \cfrac{x-1}{-\frac{6}{5}+\vdots} + \cfrac{y-1}{2+\vdots}} + \cfrac{y-1}{2 + \cfrac{x-1}{2+\vdots} + \cfrac{y-1}{2+\vdots}}}. \tag{20} $$

Точное значение функции $\sqrt{xy}$ в точке $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$ равно 1. а приближенное значение, равное третьей подходящей дроби для ветвящейся цепной дроби (20), в той же точке равно 1,00026.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. «Наукова думка», К., 1974.
2. Данилов В. Л. и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). Физматгиз, М., 1961.
3. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. ГИТТЛ, М., 1953.
4. Thiele T. N. Interpolationsrechnung, Leipzig, 1909.



Львовский политехнический институт,
Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР



Поступила в редколлегию
в октябре 1973 г.