

Кроме того, требуется, чтобы при $x = 0$ функция $y_0(x)$ удовлетворяла тем же крайним условиям, что и $y(x)$, а функции $y_j(x)$ обращались в нуль вместе со своими пятью первыми производными.

Подставляя решение (2) в крайние условия и приравнивая нулю определитель соответствующей системы, получаем характеристический ряд рассматриваемой задачи

$$A_0 - A_1\omega^2 + A_2\omega^4 - \dots = 0. \quad (5)$$

По нескольким первым коэффициентам этого ряда можно строить двусторонние оценки для низших частот и исследовать их зависимость от параметров [1].

Как пример рассмотрим случай балки с шарнирно закрепленным ($x = 0$) и свободно защемленным ($x = 1$) концами. Краевые условия имеют вид [5]

$$y(0) = y''(0) = y^{IV}(0) = 0, \quad (6)$$

$$y'(1) = y(1) - \frac{1}{\lambda\theta} y''(1) = y'''(1) = 0, \quad \lambda = \frac{1}{\theta k}. \quad (7)$$

Вычисляя коэффициенты характеристического ряда (5) и используя простейшие оценки [1]

$$\frac{A_0}{\sqrt{A_1^2 - 2A_0A_2}} < \omega^2 < \frac{2A_0}{A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}, \quad (8)$$

исследуем зависимость основной частоты от параметра $\lambda = \frac{1}{\theta k}$ при различных значениях параметра θ (рисунок). Отметим, что верхние оценки превышают соответствующие нижние не более чем на 6%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балинский А. И., Зорий Л. М.— ФХММ, 1971, 3, 99.
2. Григолюк Э. И., Чулков П. П.— ДАН СССР, 1963, 1, 149.
3. Григолюк Э. И., Чулков П. П.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, 1.
4. Микеладзе Ш. Е. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений. Гостехтеориздат, М., 1951.
5. Смирнов А. И.— ДАН СССР, 1967, 3, 172.

Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в январе 1974 г.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ НА КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК С ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТЬЮ

А. И. Ровенчак, И. И. Тербушко

Рассматривается прямоугольная изотропная пластинка с полостями, заполненными движущейся жидкостью (рис. 1). Представляя решение задачи о малых поперечных колебаниях такой пластинки в виде

$$z(x, y, t) = f(x) \sin \pi n y \omega t \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

($x = X/a$, $y = Y/b$, $z = Z/n$ — безразмерные величины; стороны $y = 0$ и $y = 1$ — шарнирно оперты), для определения функции $f(x)$ имеем уравнение [3]

$$f^{IV} + (v^2 - 2k^2) f'' + 2v\sqrt{\xi} L f' + (k^4 + L^2) f = 0, \quad (1)$$

где

$$k = \frac{\pi n a}{b}; \quad v = u a \sqrt{\rho/D};$$

$$L = \omega a^2 \sqrt{(m + \rho)/D}; \quad \xi = \frac{\rho}{m + \rho};$$

D — цилиндрическая жесткость; m и ρ — массы пластинки и жидкости соответственно, приходящиеся на единицу площади срединной плоскости пластинки; u — скорость движения жидкости относительно пластинки.

Рассмотрим случай упругого защемления сторон пластинки, перпендикулярных потоку жидкости:

$$\begin{aligned} f(0) = 0, \quad f'(0) - \psi_1 f''(0) = 0; \\ f(1) = 0, \quad f'(1) + \psi_2 f''(1) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

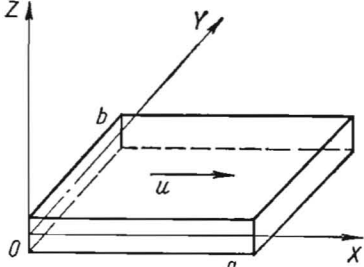


Рис. 1.

(ψ_1 и ψ_2 коэффициенты упругости защемления).

Характеристическое уравнение краевой задачи (1), (2) имеет вид [2]

$$\{\psi_1 \psi_2 F_4''(x) + (\psi_1 + \psi_2) F_4'(x) + F_4(x)\}_{x=1} = 0. \quad (3)$$

Отсюда получаем

$$c_0 - c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda^4 - \dots = 0 \quad (\lambda = -iL), \quad (4)$$

причем коэффициенты характеристического ряда определяются формулами

$$\begin{aligned} c_k &= \psi_1 \psi_2 \alpha_k'' + (\psi_1 + \psi_2) \alpha_k' + \alpha_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ \alpha_0 &= \varphi_{1,4} + 4k^4 \varphi_{3,8} + 16k^8 \varphi_{5,12}, \\ \alpha_1 &= 4v^2 \xi \varphi_{3,10} + 4\varphi_{3,8} + 48k^4 v^2 \xi \varphi_{5,14} + 32\varphi_{5,12} + 384k^8 v^2 \xi \varphi_{7,18}, \\ \alpha_2 &= 16v^4 \xi^2 \varphi_{5,16} + 48v^2 \xi \varphi_{5,14} + 320k^4 v^4 \xi^2 \varphi_{7,20} + 16\varphi_{5,12} + \\ &\quad + 768k^4 v^2 \xi \varphi_{7,18} + 3840k^8 v^4 \xi^2 \varphi_{9,24}, \\ \varphi_{i,j}(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_{n+i}^n (v^2 - 2k^2)^n}{(2n+i)!}. \end{aligned} \quad (5)$$

Исследование влияния параметров системы на основную частоту ее колебаний, как функцию скорости, проводилось с использованием формул (5) и простейших оценок [1]. Некоторые из результатов проведенных вычислений представлены на рис. 2, 3. На них приведены кривые, отвечающие нижней оценке, поскольку верх-

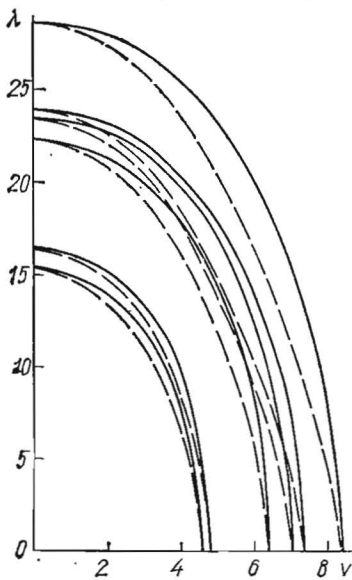


Рис. 2.

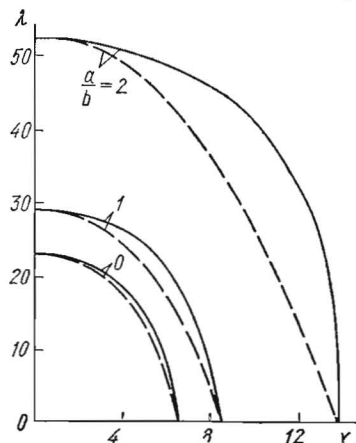


Рис. 3.

няя превышает ее весьма незначительно (соответствующие линии на графиках сливаются). Сплошными линиями изображена зависимость основной частоты от скорости при $\xi = 0$, штриховыми — при $\xi = 1$.

На рис. 2 три нижние пары кривых отвечают случаю цилиндрического изгиба ($k = 0$) при $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = \infty$; 1; 0, три верхние — квадратной пластинке ($n = 1, a/b = 1$) при тех же значениях параметров ψ_1 и ψ_2 .

Как показали вычисления, с увеличением жесткости защемления краев (уменьшение хотя бы одного из параметров ψ) основная частота и критическое значение скорости потока возрастают монотонно также при других значениях параметра a/b .

На рис. 3 приведены графики функции $\lambda(v)$ для случая жесткого защемления ($\psi_1 = \psi_2 = 0$) при следующих значениях отношения (a/b) сторон пластинки: 0; 1; 2 (нижняя кривая совпадает с соответствующим графиком работы [3], полученным другим путем). Как видно, с уменьшением параметра a/b соответствующие кривые опускаются, приближаясь к ветви, отвечающей случаю цилиндрического изгиба; при этом, начиная от значений $a/b \approx 0,5$, можно полагать $k = 0$ (разница меньше 5%).

Отметим, что влияние параметра ξ на основную частоту колебаний рассматриваемой пластинки может оказаться весьма значительным (при значениях $a/b > 1$). Так, например, при $a/b = 2$ и $v \approx 13$ значение параметра λ с изменением ξ увеличивается более чем в три раза.

В случаях $\psi_1 = 0, \psi_2 = \infty$ и $\psi_1 = \psi_2 = \infty$ ветви основной частоты имеют такой же характер, как на рис. 2, 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балинский А. И., Зорий Л. М.— ФХММ, 1971, 3, 99.
2. Зорий Л. М.— ДАН УРСР, 1968, 11, 992.
3. Махортых Ж. К.— Инженерный журнал, МТТ, 1966, 5.

Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ С ЛЕГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Г. С. Крук

На трехслойную пластинку с легким наполнителем (рис. 1), жестко закрепленную на концах, действует силой P абсолютно жесткий симметрический штамп, основание которого описывается уравнением $z = f(x, y)$. Пусть S_0 и S — области пластинки, находящиеся в соприкосновении со штампом и вне его, Γ — линия контакта. В предположении отсутствия касательных усилий в области контакта задача сводится к определению контактного давления q и размера области контакта $[-a, a]$.

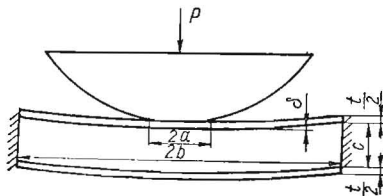


Рис. 1.

Исходим из уравнений линейной теории трехслойных пластин, учитывающей деформации поперечного сдвига [1]:

$$\alpha + w' = \frac{Bc}{2G_3} \alpha'',$$

$$Dw^{IV} - \frac{B(c+t)^2}{2} \alpha''' = q. \quad (1)$$

Контактное давление, зависимость размеров области контакта от приложенной силы и постоянные интегрирования дифференциальных уравнений (1) находим из условий непрерывности прогибов, углов поворота нормали,