Проводя рассуждения, аналогичные изложенным, приходим к двусторонним последовательностям оценок вида

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\beta}_{2m}<\tilde{\beta}_{2m+2}<\cdots<\beta^*<\cdots<\tilde{\beta}_{2m+3}<\tilde{\beta}_{2m+1};\\ \tilde{\beta}_{2m+1}<\tilde{\beta}_{2m+3}<\cdots<\beta^*<\cdots<\tilde{\beta}_{2m+4}<\tilde{\beta}_{2m+2}\end{array}\right\} \qquad (6)$$

(первая из них отвечает случаю 3), вторая — 4)).

Отметим, что полученные оценки (4), (6) приводят, как правило, к достаточно узкой вилке для критических значений флаттера при использовании соответствующих определителей невысокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зорій Л. М., Ісаєв Ю. І.— ДАН УРСР. Сер. А, 1973, 529—531.
2. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. С. Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1949.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

О НЕСАМОСОПРЯЖЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ВСЕЙ ОСИ

И. П. Сыроид

Предположим, что невозмущенный самосопряженный оператор T_0 и возмущенный оператор T порождаются дифференциальными выражениями $l_0[u]=-u''$ и $l[u]=-u''+qu$ соответственно в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty,\infty)$. Функция q — комплекснозначна. Факторизуем оператор Q умножения на функцию q, следуя Като [5]: $q(x)=b(x)a(x)$, $b(x)=\operatorname{sgn} q(x)\,|q(x)|^{\frac{1}{2}}$, $a(x)=|q(x)|^{\frac{1}{2}}$, $Q=B^*A$, где A — оператор умножения на функцию $a(x)$, B — оператор умножения на $\bar{b}(x)$ в $L_2(-\infty,\infty)$.

Пусть $q\in L_1(-\infty,\infty)\cap L_2(-\infty,\infty)$, $R_0(\zeta)$ — резольвента оператора T_0. Тогда замыкание $[AR_0(\zeta)B^*]$ оператора $AR_0(\zeta)B^*$, а также продолжения $[AR_0(\zeta)B^*]_\pm$ функции $\zeta\to[AR_0(\zeta)B^*]$ на положительную полуось являются операторами Гильберта — Шмидта в $L_2(-\infty,\infty)$. Изучение асимптотики операторов $[AR_0(\zeta)B^*]_\pm$ при $|\zeta|\to\infty$ показывает, что оператор T имеет не более чем счетное множество собственных значений конечной алгебраической кратности с возможными точками сгущения на положительной полуоси. Положительная полуось принадлежит непрерывному спектру. Положительные числа ζ, для которых операторы $1+[AR_0(\zeta)B^*]_\pm$ необратимы, назовем спектральными особенностями оператора T[1]. Множество собственных значений и спектральных особенностей ограничено в комплексной плоскости.

Определим пространства Φ_1 и Φ_{-1}:

$$\Phi_1=\left\{\varphi\colon \int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\,|\varphi(x)|^2\,dx<\infty\right\},\quad \Phi_{-1}=\left\{f\colon \int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}\,|f(x)|^2dx<\infty\right\}$$

с нормами $\|\varphi\|_1=\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\,|\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ и $\|f\|_{-1}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}\times |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ соответственно. Очевидно, что $\Phi_1\subset L_2(-\infty,\infty)\subset\Phi_{-1}$ и соответствующие вложения непрерывны.

[1] Операторы со спектральными особенностями изучались во многих работах, например [2, 4, 1]. Наиболее полная библиография содержится в [3].

Предположим, что $q \in \Phi_1$. Тогда для каждого действительного числа $\lambda \neq 0$, такого, что λ^2 не является спектральной особенностью, уравнение $-u'' + qu = \lambda^2 u$ имеет в Φ_{-1} решения $u_\pm(x, \lambda) = e(x, \lambda) - R(\lambda^2)_\pm qe(x, \lambda)$, $e(x, \lambda) = e^{-ix\lambda}$, а сопряженное уравнение $-u'' + \bar{q}u = \lambda^2 u$ имеет решения $\overset{*}{u}_\pm(x, \lambda) = e(x, \lambda) - R^*(\lambda^2)_\pm \overline{(qe)}(x, \lambda)$, где $R(\zeta)_\pm : \Phi_1 \to \Phi_{-1}$ ($R^*(\zeta)_\pm : \Phi_1 \to \Phi_{-1}$) — продолжения резольвенты оператора T (T^*) на непрерывный спектр.

Решения $u_\pm(x, \lambda)$ и $\overset{*}{u}_\pm(x, \lambda)$, для нахождения которых можно использовать одномерное уравнение Липпмана—Швингера

$$u_\pm(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \pm \frac{1}{2i|\lambda|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i|\lambda||x-t|} q(t)\, u_\pm(t, \lambda)\, dt,$$

определяют T^*- и T-преобразования Фурье

$$\tilde{\mathfrak{A}}_\pm \varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{u_\pm(x, \lambda)}\, dx,$$

$$\tilde{\mathfrak{L}}_\pm \varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \overline{\overset{*}{u}_\pm(x, \lambda)}\, dx, \quad \varphi \in \Phi_1.$$

Операторы $\tilde{\mathfrak{A}}_\pm$ и $\tilde{\mathfrak{L}}_\pm$ обладают следующими свойствами непрерывности

$$\int_{\Lambda(\Delta)} |\tilde{\mathfrak{A}}_\pm \varphi(\lambda)|^2\, d\lambda \leqslant c_\Delta^\pm \|\varphi\|^2, \qquad \int_{\Lambda(\Delta)} |\tilde{\mathfrak{L}}_\pm \varphi(\lambda)|^2\, d\lambda \leqslant c_{1,\Delta}^\pm \|\varphi\|^2,$$

где Δ — измеримое подмножество действительной оси; $c_\Delta^\pm$ и $c_{1,\Delta}^\pm$ — числа, зависящие только от множества Δ, $\Lambda(\Delta) = \{\lambda \in R : \lambda^2 \in \Delta\}$. Если замыкание $\bar{\Delta}$ множества Δ не содержит точку 0 и спектральных особенностей оператора T, то числа $c_\Delta^\pm$ и $c_{1,\Delta}^\pm$ конечны. Описанные свойства доказываются с помощью техники, развитой в работе [5], и позволяют расширить операторы $\tilde{\mathfrak{A}}_\pm$ и $\tilde{\mathfrak{L}}_\pm$ до непрерывных отображений

$$\mathfrak{A}_\pm, \mathfrak{L}_\pm : L_2(-\infty, \infty) \to L_2(\Lambda(\Delta)).$$

Используя формулу

$$Q(R(\zeta)_+ - R(\zeta)_-) = (1 + QR_0(\zeta))_-^{-1} Q(R_0(\zeta)_+ - R_0(\zeta)_-)(1 + QR_0(\zeta))_+^{-1},$$

описывающую связь между скачками резольвент возмущенного и невозмущенного операторов на непрерывном спектре, а также соотношения $Qe(x, \zeta) = (1 + QR_0(\zeta))_\pm Qu_\pm(x, \zeta)$, получаем теорему.

Теорема. *Пусть $q \in \Phi_1$ и замыкание $\bar{\Delta}$ измеримого подмножества Δ положительной полуоси не содержит спектральных особенностей оператора T и точки 0. Тогда*

1) *полуторалинейная форма*

$$(P(\Delta)\varphi, \psi) = \int_{\Delta} ((R(\zeta)_+ - R(\zeta)_-)\varphi, \psi)\, d\zeta$$

определяет проектор на соответствующее приводящее подпространство оператора T. При этом

$$P(\Delta) = \overset{*}{\mathfrak{A}}_\pm \chi_{\Lambda(\Delta)}(S)\, \mathfrak{L}_\pm,$$

где $\chi_{\Lambda(\Delta)}(S)$ — оператор умножения на характеристическую функцию множества $\Lambda(\Delta)$;

2) *$\chi_{\Lambda(\Delta)}(S)\, \mathfrak{L}_\pm \overset{*}{\mathfrak{A}}_\pm f_\Delta = f_\Delta$ для $\forall f_\Delta \in L_2(\Lambda(\Delta))$, т. е. оператор $\chi_{\Lambda(\Delta)}(S)\, \mathfrak{L}_\pm : P(\Delta) L_2(-\infty, \infty) \to L_2(\Lambda(\Delta))$ обратим.*

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы, а F — обозначает преобразование Фурье — Планшереля в $L_2(-\infty, \infty)$. Тогда операторы

$$W_\pm(\Delta) = \overset{*}{\mathfrak{A}}_\pm \chi_{\Lambda(\Delta)}(S) F^{-1}, \quad Z_\pm(\Delta) = F \chi_{\Lambda(\Delta)}(S)\, \mathfrak{L}_\pm$$

осуществляют подобие соответствующих частей возмущенного и невозмущенного операторов

$$TP(\Delta) = W_{\pm}(\Delta)\, T_0 P_0(\Delta)\, W_{\pm}(\Delta)^{-1}, \quad W_{\pm}(\Delta)^{-1} = Z_{\pm}(\Delta),$$

где $P_0(\Delta) = F\chi_{\Lambda(\Delta)}(S)\, F^{-1}$.

Поскольку T_0 — самосопряженный оператор, то iT_0 является инфинитезимальной производящей сильно непрерывной группы класса C_0, и, следуя [5], получаем

$$W_{\pm}(\Delta) = s - \lim_{t\to\pm\infty} \exp(itTP(\Delta))\, P(\Delta) \exp(-itT_0P_0(\Delta)),$$

$$Z_{\pm}(\Delta) = s - \lim_{t\to\pm\infty} \exp(itT_0P_0(\Delta))\, P_0(\Delta) \exp(-itTP(\Delta)).$$

Последнее означает, что $W_{\pm}(\Delta)$ являются волновыми операторами по отношению к операторам $TP(\Delta)$ и $T_0P_0(\Delta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блащак В. А.— ДАН УРСР, 1965, 4, 416—419.
2. Лянце В. Э. О дифференциальном операторе со спектральными особенностями, I. Матем. сборник, 64 (106), 4, 521—561, 1964; II, Матем. сборник, 65 (107), 1, 47—103, 1964.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. «Наука», М., 1969.
4. Павлов Б. С.— ДАН СССР, 1961, 141, 4, 807—810.
5. Kato T.— Math. Annal., 1966, 162, 258—279.

Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в январе 1974 г.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ НА НИЗШИЕ ЧАСТОТЫ ТРЕХСЛОЙНЫХ БАЛОК

Б. С. Остапович

К задачам о колебаниях трехслойных балок применяется метод характеристических рядов, что позволяет оценивать низшие частоты и исследовать их зависимость от параметров.

Изгибные колебания трехслойной балки при известных допущениях [2, 3, 5] описываются дифференциальным уравнением в частных производных относительно функции перемещений $y(x, t)$, связанной с изгибом $w(x, t)$ зависимостью $w(x, t) = l(1 + k\Delta^2)\, y(x, t)$. Полагая, как обычно, $y(x, t) = y(x)\, e^{i\omega_* t}$, приходим к многопараметрической задаче на собственные значения для уравнения

$$\theta k \frac{d^{(6)} y(x)}{dx^6} - \frac{d^{(4)} y(x)}{dx^4} - k\omega^2 \frac{d^{(2)} y(x)}{dx^2} + \omega^2 y(x) = 0, \tag{1}$$

где $\omega^2 = \frac{\Omega l^4}{D}\omega_*^2$; ω_* — параметр частоты; l, θ, k, D, Ω — некоторые постоянные, зависящие от геометрических и массовых характеристик балки.

Решение уравнения (1) ищется в виде ряда [4]

$$y(x) = y_0(x) + \omega^2 y_1(x) + \omega^4 y_2(x) + \cdots. \tag{2}$$

Подставляя это выражение в (1), получаем рекуррентные соотношения для определения коэффициентов $y_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\theta k y_0^{\mathrm{VI}}(x) - y_0^{\mathrm{IV}}(x) = 0, \tag{3}$$

$$\theta k y_j^{\mathrm{VI}}(x) - y_j^{\mathrm{IV}}(x) = k y_{j-1}''(x) - y_{j-1}(x) \quad (j = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$