симметризующий оператор $\tilde{S}$, обладающий свойством равномерной положительной определенности. В пространстве $\tilde{R}_m$ вводим новое скалярное произведение $(\tilde{x}, \tilde{y})_{\tilde{s}} = (\tilde{S}\tilde{x}, \tilde{y})$ и убеждаемся, что $(\tilde{A}\tilde{x}, \tilde{y})_{\tilde{s}} = (\tilde{x}, \tilde{A}\tilde{y})_{\tilde{s}}$. Таким образом, исходная нелинейная задача на собственные значения для сильно демпфированного полиномиального пучка сведена нами к эквивалентной линейной задаче для самосопряженного оператора.

Отметим, что полиномиальные пучки самосопряженных операторов, определяющим признаком которых является существование вещественнозначных (принимающих не обязательно отрицательные значения) функционалов $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ со свойствами а) — в), образуют класс «сильно демпфированных» пучков, к которым также применим метод симметризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балінський А. І., Зорій Л. М.— ДАН УРСР. Сер. А, 1972, 6, 485—488.
2. Балинский А. И.— Автореферат канд. дис. Львовский ун-т, Львов, 1972.
3. Кац А. М.— ПММ, 1951, 15, 1.
4. Маркус А. С., Мацаев В. И., Руссу Г. И.— Acta Scien. Math., Szeged, 1973, 34, 245—271.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Физматгиз, М., 1966.
6. Ржаницын А. Р. Механика систем, деформирующихся во времени. ГИТТЛ М., 1949.
7. Duffin R.— J. Rat. Mech. Anal., 1955, 4, 2, 221—233.
8. Langer H.— J. Math. Mech., 1968, 17, 7, 685—705.

Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ФЛАТТЕРА В НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

Л. М. Зорий, Ю. И. Исаев

Вопросы построения последовательностей двусторонних оценок критических параметров упругих систем при флаттере рассматривались в работе [1]. Полученные в ней оценки являются эффективными, если не очень близки при отсутствии нагрузки ($\beta = 0$) соседние корни соответствующей вещественной пары функций u и v:

$$\left.\begin{aligned} u &= A_0 - A_2\lambda^2 + A_4\lambda^4 - \cdots + (-1)^n A_{2n}\lambda^{2n} + \cdots; \\ v &= A_1\lambda - A_3\lambda^3 + A_5\lambda^5 - \cdots + (-1)^{n-1} A_{2n-1}\lambda^{2n-1} + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

обуславливающие автоколебательную потерю устойчивости.

В особых случаях (близость таких корней) последовательности полиномов, равномерно приближающие функции u, v соответственно, состоят из элементов u_n, v_n, образующих вещественные пары, только начиная с некоторого достаточно большого номера n (тем большего, чем ближе при $\beta = 0$ указанные корни). При этом для определения верхних и нижних оценок критических значений приходится пользоваться определителями Гурвица достаточно высокого порядка. Естественно, данное обстоятельство может вызвать существенные трудности, связанные с нахождением нулей таких определителей (их элементы могут быть весьма сложными функциями параметров), а также с необходимостью использования значительного числа коэффициентов характеристического ряда, определение которых с увеличением их номера, как правило, усложняется.

Отсюда возникает задача построения последовательностей оценок, позволяющих эффективно определять в особых случаях достаточно узкую вилку для критических нагрузок, с использованием определителей невысокого порядка. Такие последовательности двусторонних оценок можно построить, например, если вместо функций u, v рассмотреть некоторую другую эквивалентную (в смысле автоколебательной потери устойчивости) вещественную пару функций, удовлетворяющую следующему требованию: расстояние между ее соседними корнями, обуславливающими при $\beta = \beta^*$ потерю устойчивости, уже не будет при $\beta = 0$ столь малым, как между соответствующими корнями пары функций u, v. Для этого преобразуем функцию v к виду

$$v = \frac{A_1}{A_0}\lambda v^* = \frac{A_1}{A_0}\lambda(A_0 - A_3^*\lambda^2 + A_5^*\lambda^4 - \cdots + (-1)^n A_{2n+1}^*\lambda^{2n} + \cdots).$$

Пусть указанными близкими корнями пары u и v (v^*) будут некоторые корни: 1) нечетного номера ($2m - 1$); 2) четного ($2m$). Тогда рассмотрим следующую пару функций ($\lambda^2 = s$):

$$\left.\begin{aligned} &u = A_0 - A_2 s + A_4 s^2 + \cdots + (-1)^n A_{2n} s^n + \cdots; \\ &(v^* - u) = (A_2 - A_3^*)\, s - (A_4 - A_5^*)\, s_2 + \cdots + (-1)^{n-1}(A_{2n} - A_{2n+1}^*) s^n + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Нетрудно убедиться [2], что эти функции образуют вещественную пару. С другой стороны, корни функции ($v^* - u$), совпадающие, очевидно, со значениями s, при которых $u(s)$ и $v^*(s)$ равны друг другу, будут при $\beta = 0$ всегда бо́льшими соответствующих им корней функции v^*. Поскольку, кроме того, при $\beta = \beta^*$ общий корень пары u и v^* является одновременно и корнем функции ($v^* - u$), то вещественная пара (2) удовлетворяет отмеченному выше требованию.

Рассмотрим теперь последовательности полиномов

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A_{2k} s^k; \\ (v^* - u)_n &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (A_{2k} - A_{2k+1}^*)\, s^k, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

которые аналогичны последовательностям из работы [1] и, следовательно, образуют вещественные пары, а также сходятся к функциям u и ($v^* - u$) равномерно.

Обозначим через $\tilde\beta_{2m}$ и $\tilde\beta_{2m+1}$ значения параметра β, при которых перестают образовывать вещественную пару полиномы $(v^* - u)_{2m}$, u_{2m} и $(v^* - u)_{2m+1}$, u_{2m+1} соответственно. Поступая, далее, как в работе [1], находим соответствующие последовательности оценок

$$\left.\begin{aligned} &\tilde\beta_{2m} < \tilde\beta_{2m+2} < \cdots < \beta^* < \cdots < \tilde\beta_{2m+3} < \tilde\beta_{2m+1}; \\ &\tilde\beta_{2m+1} < \tilde\beta_{2m+3} < \cdots < \beta^* < \cdots < \tilde\beta_{2m+4} < \tilde\beta_{2m+2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Рассмотрим другие возможные варианты. Пусть потеря устойчивости происходит через слияние таких близких (при $\beta = 0$) корней: 3) нечетного ($2m$ — 1-го номера) функции v с четным ($2m$-го номера) функции u; 4) четного ($2m$-го) функции v с нечетным ($2m$ + 1-го) функции u. Применяя здесь тот же подход, в качестве эквивалентной вещественной пары выберем u, ($v^* + u$). Тогда

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A_{2k} s^k; \\ (v^* + u)_n &= 2A_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (A_{2k} + A_{2k+1}^*)\, s^k. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным, приходим к двусторонним последовательностям оценок вида

$$\left.\begin{array}{l}\tilde\beta_{2m} < \tilde\beta_{2m+2} < \cdots < \beta^* < \cdots < \tilde\beta_{2m+3} < \tilde\beta_{2m+1};\\ \tilde\beta_{2m+1} < \tilde\beta_{2m+3} < \cdots < \beta^* < \cdots < \tilde\beta_{2m+4} < \tilde\beta_{2m+2}\end{array}\right\} \qquad (6)$$

(первая из них отвечает случаю 3), вторая — 4)).

Отметим, что полученные оценки (4), (6) приводят, как правило, к достаточно узкой вилке для критических значений флаттера при использовании соответствующих определителей невысокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. З о р і й Л. М., І с а є в Ю. І.— ДАН УРСР. Сер. А, 1973, 529—531.
2. Ч е б о т а р е в Н. Г., М е й м а н Н. С. Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1949.

Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.

О НЕСАМОСОПРЯЖЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ВСЕЙ ОСИ

И. П. Сыроид

Предположим, что невозмущенный самосопряженный оператор T_0 и возмущенный оператор T порождаются дифференциальными выражениями $l_0[u] = -u''$ и $l[u] = -u'' + qu$ соответственно в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Функция q — комплекснозначна. Факторизуем оператор Q умножения на функцию q, следуя Като [5]: $q(x) = b(x)a(x)$, $b(x) = \operatorname{sgn} q(x)\,|q(x)|^{\frac{1}{2}}$, $a(x) = |q(x)|^{\frac{1}{2}}$, $Q = B^*A$, где A — оператор умножения на функцию $a(x)$, B — оператор умножения на $\overline{b}(x)$ в $L_2(-\infty, \infty)$.

Пусть $q \in L_1(-\infty, \infty) \cap L_2(-\infty, \infty)$, $R_0(\zeta)$ — резольвента оператора T_0. Тогда замыкание $[AR_0(\zeta)B^*]$ оператора $AR_0(\zeta)B^*$, а также продолжения $[AR_0(\zeta)B^*]_\pm$ функции $\zeta \to [AR_0(\zeta)B^*]$ на положительную полуось являются операторами Гильберта — Шмидта в $L_2(-\infty, \infty)$. Изучение асимптотики операторов $[AR_0(\zeta)B^*]_\pm$ при $|\zeta| \to \infty$ показывает, что оператор T имеет не более чем счетное множество собственных значений конечной алгебраической кратности с возможными точками сгущения на положительной полуоси. Положительная полуось принадлежит непрерывному спектру. Положительные числа ζ, для которых операторы $1 + [AR_0(\zeta)B^*]_\pm$ необратимы, назовем спектральными особенностями оператора T[1]. Множество собственных значений и спектральных особенностей ограничено в комплексной плоскости.

Определим пространства Φ_1 и Φ_{-1}:

$$\Phi_1 = \left\{\varphi\colon \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)\,|\varphi(x)|^2\,dx < \infty\right\}, \quad \Phi_{-1} = \left\{f\colon \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-1}\,|f(x)|^2 dx < \infty\right\}$$

с нормами $\|\varphi\|_1 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)\,|\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ и $\|f\|_{-1} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-1} \times |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ соответственно. Очевидно, что $\Phi_1 \subset L_2(-\infty, \infty) \subset \Phi_{-1}$ и соответствующие вложения непрерывны.

---

[1] Операторы со спектральными особенностями изучались во многих работах, например [2, 4, 1]. Наиболее полная библиография содержится в [3].