СИЛЬНО ДЕМПФИРОВАННЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ПУЧКИ И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ СИММЕТРИЗАЦИИ

А. И. Балинский, Л. М. Зорий

Задачи о малых колебаниях упругих систем с конечным числом степеней свободы сводятся, как известно, к исследованию квадратичного пучка операторов (в конечномерном унитарном пространстве R_m)

$$P(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$$

с самосопряженными операторами A, B, C; $A > 0$, $B = 0$, $C > 0$ в случае, считающимся классическим (консервативные системы). Недавно Р. Даффин [7] выделил класс систем с трением ($B > 0$), удовлетворяющих условию

$$(Bx, x)^2 - 4(Ax, x)(Cx, x) > 0 \quad \forall x \in R_m - \{0\}. \tag{1}$$

На такие системы, названные им сильно демпфированными, был распространен вариационный метод исследования. При этом место известного отношения Рэлея занимала пара вещественнозначных функционалов

$$p_{1,2}(x) = [-(Bx, x) \pm ((Bx, x)^2 - 4(Ax, x)(Cx, x))^{1/2}]/2(Ax, x),$$

с помощью которых определялись собственные значения соответствующей нелинейной задачи (к сильно демпфированным квадратичным пучкам самосопряженных операторов, как следует из дальнейшего, применим метод симметризации [1], вследствие чего нелинейная задача на собственные значения сводится к эквивалентной линейной задаче для самосопряженного оператора).

Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$P(\lambda) = \lambda^n A_0 + \lambda^{n-1} A_1 + \cdots + \lambda A_{n-1} + A_n, \tag{2}$$

где A_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) — самосопряженные операторы в пространстве R_m, $A_0 > 0$ (такие пучки возникают, в частности, при изучении упруговязких систем [5, 6]).

Определим класс сильно демпфированных систем, обобщив приведенное выше условие на полиномиальные операторные пучки (2), и покажем, что к их исследованию применим метод симметризации *.

Пусть

$$\varphi_x(\lambda) = \lambda^n a_0(x) + \lambda^{n-1} a_1(x) + \cdots + \lambda a_{n-1}(x) + a_n(x),$$

$$\varphi_x'(\lambda) = n\lambda^{n-1} a_0(x) + (n-1)\lambda^{n-2} a_1(x) + \cdots + 2\lambda a_{n-2}(x) + a_{n-1}(x),$$

где $a_i(x) = (A_i x, x)$. Пучок $P(\lambda)$ будем называть сильно демпфированным, если для всех $x \in R_m - \{0\}$ выполняются условия

$$D_k(x) = \begin{vmatrix} c_1(x) & c_3(x) & c_5(x) & \ldots & c_{2k-1}(x) \\ c_0(x) & c_2(x) & c_4(x) & \ldots & c_{2k-2}(x) \\ 0 & c_1(x) & c_3(x) & \ldots & c_{2k-3}(x) \\ 0 & c_0(x) & c_2(x) & \ldots & c_{2k-4}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_k(x) \end{vmatrix} > 0 \tag{3}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, 2n),$$

причем

$c_{2i}(x) = a_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$; $c_{2i+1}(x) = (n-i)\, a_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$; $c_j(x) = 0$ при $j > 2n$ (при $n = 2$ они совпадают с условиями (1) сильной демпфированности квадратичного пучка).

---

* Этот результат был установлен в работе [2]. Обобщению условий сильной демпфированности на полиномиальные пучки операторов в бесконечномерном пространстве и их исследованию другим методом посвящена работа [4].

Неравенства $D_k'(x) > 0$ ($k = 1, 2, \ldots, 2n$) являются, как известно [3], необходимыми и достаточными условиями того, что все корни каждого из уравнений $\varphi_x(\lambda) = 0$ отрицательные и простые. Учитывая это, нетрудно убедиться, что для сильно демпфированного пучка $P(\lambda)$ существуют определенные на $R_m - \{0\}$ вещественнозначные функционалы $p_1(x), p_2(x), \ldots$ $\ldots, p_n(x)$, обладающие следующими свойствами:

а) $\varphi_x(p_i(x)) = 0$;

б) $p_i(\alpha x) = p_i(x), \quad \alpha \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$;

в) $(-1)^i \varphi_x'(p_i(x)) < 0$.

Используя эти свойства, убеждаемся, что области значений $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ функционалов $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ образуют совокупность взаимно непересекающихся замкнутых интервалов $[a_i, b_i]$ вещественной оси *, причем

$$a_i = \min_{\|x\|=1} p_i(x), \quad b_i = \max_{\|x\|=1} p_i(x).$$

Поскольку функционалы однородны, то достаточно ограничиться рассмотрением их на единичной сфере $\|x\| = 1$ пространства R_m. Из очевидных свойств непрерывности и равномерной ограниченности этих функционалов следует, что каждая из областей π_i является ограниченным замкнутым интервалом $[a_i, b_i]$ вещественной оси. Расположим эти интервалы в порядке убывания их левых или правых концов. Тогда для установления соотношения $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$ при $i \neq j$ достаточно убедиться, что не пересекаются никакие из двух соседних интервалов.

Предположим, что существуют два вектора x_i, x_{i+1}, для которых $p_i(x_i) = p_{i+1}(x_{i+1}) = \lambda_0$. Тогда из свойства в) вытекает, что

$$(-1)^i \varphi_{x_i}'(\lambda_0) < 0, \qquad (-1)^{i+1} \varphi_{x_{i+1}}'(\lambda_0) < 0.$$

Предполагая, что $\operatorname{Re}(P(\lambda_0) x_i, x_{i+1}) = 0$, и рассматривая векторы $z(t) = tx_i + (1-t) x_{i+1}$, имеем $\varphi_{z(t)}(\lambda_0) = 0$, причем $\varphi_{z(t)}(\lambda_0)$ — непрерывная функция от t. Следовательно, найдется значение $t = t_0$ $(0 < t_0 < 1)$, для которого

$$\varphi_{z(t_0)}'(\lambda_0) = \varphi_{z(t_0)}(\lambda_0) = 0,$$

что приводит к противоречию.

На основании установленных свойств областей π_i приходим к выводу, что можно указать $n - 1$ различных вещественных значений α_i параметра λ, не принадлежащих спектру пучка, и таких, что

$$(-1)^i (P(\alpha_i) x, x) > 0 \text{ для всех } x \in R_m - \{0\}.$$

При этом в качестве α_i можно брать любые значения из интервалов (b_{i+1}, a_i) соответственно.

Применяя теперь результаты работы [1], строим в пространстве $\tilde{R}_m = R_m \oplus R_m \oplus \cdots \oplus R_m$ (n слагаемых) для ассоциированного с пучком (2) оператора

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & I \\ -A_0^{-1}A_n & -A_0^{-1}A_{n-1} & -A_0^{-1}A_{n-2} & \ldots & -A_0^{-1}A_2 & -A_0^{-1}A_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

* Данное свойство областей значений соответствующих функционалов в случае квадратичных пучков было установлено в работе [7] (см. также [8]).

симметризующий оператор $\tilde{S}$, обладающий свойством равномерной положительной определенности. В пространстве $\tilde{R}_m$ вводим новое скалярное произведение $(\tilde{x}, \tilde{y})_{\tilde{s}} = (\tilde{S}\tilde{x}, \tilde{y})$ и убеждаемся, что $(\tilde{A}\tilde{x}, \tilde{y})_{\tilde{s}} = (\tilde{x}, \tilde{A}\tilde{y})_{\tilde{s}}$. Таким образом, исходная нелинейная задача на собственные значения для сильно демпфированного полиномиального пучка сведена нами к эквивалентной линейной задаче для самосопряженного оператора.

Отметим, что полиномиальные пучки самосопряженных операторов, определяющим признаком которых является существование вещественнозначных (принимающих не обязательно отрицательные значения) функционалов $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ со свойствами а) — в), образуют класс «сильно демпфированных» пучков, к которым также применим метод симметризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балінський А. І., Зорій Л. М.— ДАН УРСР. Сер. А, 1972, 6, 485—488.
2. Балинский А. И.— Автореферат канд. дис. Львовский ун-т, Львов, 1972.
3. Кац А. М.— ПММ, 1951, 15, 1.
4. Маркус А. С., Мацаев В. И., Руссу Г. И.— Acta Scien. Math., Szeged, 1973, 34, 245—271.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Физматгиз, М., 1966.
6. Ржаницын А. Р. Механика систем, деформирующихся во времени. ГИТТЛ М., 1949.
7. Duffin R.— J. Rat. Mech. Anal., 1955, 4, 2, 221—233.
8. Langer H.— J. Math. Mech., 1968, 17, 7, 685—705.

Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ФЛАТТЕРА В НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

Л. М. Зорий, Ю. И. Исаев

Вопросы построения последовательностей двусторонних оценок критических параметров упругих систем при флаттере рассматривались в работе [1]. Полученные в ней оценки являются эффективными, если не очень близки при отсутствии нагрузки ($\beta = 0$) соседние корни соответствующей вещественной пары функций u и v:

$$\left.\begin{aligned} u &= A_0 - A_2\lambda^2 + A_4\lambda^4 - \cdots + (-1)^n A_{2n}\lambda^{2n} + \cdots; \\ v &= A_1\lambda - A_3\lambda^3 + A_5\lambda^5 - \cdots + (-1)^{n-1} A_{2n-1}\lambda^{2n-1} + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

обуславливающие автоколебательную потерю устойчивости.

В особых случаях (близость таких корней) последовательности полиномов, равномерно приближающие функции u, v соответственно, состоят из элементов u_n, v_n, образующих вещественные пары, только начиная с некоторого достаточно большого номера n (тем большего, чем ближе при $\beta = 0$ указанные корни). При этом для определения верхних и нижних оценок критических значений приходится пользоваться определителями Гурвица достаточно высокого порядка. Естественно, данное обстоятельство может вызвать существенные трудности, связанные с нахождением нулей таких определителей (их элементы могут быть весьма сложными функциями параметров), а также с необходимостью использования значительного числа коэффициентов характеристического ряда, определение которых с увеличением их номера, как правило, усложняется.

Отсюда возникает задача построения последовательностей оценок, позволяющих эффективно определять в особых случаях достаточно узкую вилку для критических нагрузок, с использованием определителей невысо-