Из теоремы следует, что если в выражении (6) C — матрица Якоби (тридиагональная матрица), т. е.

$$C = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^{n}, \ a_{ij} \in P, \ a_{ij} = 0 \text{ при } |i-j| \geqslant 2,$$

то матричный трехчлен вида (6) абсолютно разложим при a_{ij} ($|i-j| < 2$), отличных от элементов некоторого конечного подмножества поля P.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казимирский П. С.— УМЖ, 1972, **24**, 3, 315.
2. Теребейко Б. И.— Вестник Львовск. политехн. ин-та, 1965, **8**, 67.

Львовский филиал
математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

ОБЩИЕ УСЛОВИЯ ПРИВОДИМОСТИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. М. Парасюк

Пусть имеем уравнение

$$z^{(n)} + \alpha_1(t) z^{(n-1)} + \cdots + \alpha_{n-1}(t) z' + \alpha_n(t) z = 0, \tag{1}$$

коэффициенты которого непрерывно дифференцируемы достаточное количество раз на интервале (α, β).

Приводимыми к уравнению (1) будем называть уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0, \tag{2}$$

которые можно привести к виду (1) с помощью некоторой замены переменных

$$t = g(x), \quad z = u(x) y, \tag{3}$$

где $u(x)$ и $g(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции до n-го порядка включительно, причем $u(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$.

Очевидно, что для приводимости уравнения (2) необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты имели вид

$$p_i(x) = \left(\alpha_i a_{n0} - \sum_{k=0}^{i-1} a_{n-k,i-k} p_k \right) a_{n-i,0}^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

$$a_{lm} = \sum_{j=1}^{l-m+1} a'_{l-j,m-1} (g')^{j-1} \quad (l, m = 1, 2, \ldots, n),$$

$$a_{l0} = u^{-1} (g')^{l} \quad (l = 0, 1, \ldots, n), \quad p_0 = 1. \tag{5}$$

Используя понятие семиинвариантов [1, 2], приведенное выше утверждение можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Для того чтобы уравнение* (2) *заменой* (3) *приводилось к уравнению* (1), *необходимо и достаточно, чтобы его семиинварианты имели вид*

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{n-j}{k+1-j} \tilde{A}_{k+1-j} \tilde{p}_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{6}$$

где $\tilde{A}_{j+1} = \tilde{A}'_j - \frac{1}{n} \tilde{p}_1 \tilde{A}_j$, $\tilde{A}_0 = 1$, *а функции* $\tilde{p}_j(x)$ *определяются из формул* (4) *с заменой функций* a_{lm} *на* $\tilde{a}_{lm}$, *причем*

$$\tilde{a}_{lm} = \sum_{i=1}^{l-m} \tilde{a}'_{l-i,m-1} (g')^{i-1} \quad (l, m = 1, 2, \ldots, n), \quad \tilde{a}_{l0} = (g')^{l}$$
$$(l = 0, 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Рассмотрим случай, когда уравнение (1) имеет постоянные коэффициенты. Исключая g', g'', ... из уравнений (6), получаем различные условия приводимости уравнений с переменными коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами, определенные непосредственно через коэффициенты уравнения (2). Это дает возможность сразу записать общее решение исследуемого уравнения. При этом в случае, когда не все коэффициенты уравнения (1) равны нулю, можно указать формулу для определения функции $g(x)$.

Проиллюстрируем сказанное на примере уравнения третьего порядка

$$y''' + p_1(x)\,y'' + p_2(x)\,y' + p_3(x)\,y = 0. \tag{8}$$

Его семиинварианты, как известно, имеют вид

$$\begin{aligned} J_1 &= p_2 - p_1' - \frac{1}{3}p_1^2, \\ J_2 &= p_3 - \frac{1}{3}p_1p_2 + \frac{2}{27}p_1^3 - \frac{1}{3}p_1''. \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\tilde{y}''' + J_1\tilde{y}' + J_2\tilde{y} = 0, \tag{10}$$

к которому приводится уравнение (8) с помощью замены

$$\tilde{y} = ye^{\frac{1}{3}\int p_1 dx}.$$

На основании предыдущей теоремы заключаем, что для приведения уравнения (10) к уравнению с постоянными коэффициентами вида

$$z''' + \alpha_1 z' + \alpha_2 z = 0, \tag{11}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} J_1 &= 2\left(\frac{g''}{g'}\right)' - \left(\frac{g''}{g'}\right)^2 + \alpha_1(g')^2, \\ J_2 &= \left(\frac{g''}{g'}\right)'' - \frac{g''}{g'}\left(\frac{g''}{g'}\right)' + \alpha_1 g'g'' + \alpha_2(g')^3. \end{aligned} \tag{12}$$

Если $J_2 - \frac{1}{2}J_1' \neq 0$, то из (12) получаем

$$g' = \frac{\sqrt[3]{J_2 - \frac{1}{2}J_1'}}{\sqrt[3]{\alpha_2}}. \tag{13}$$

Пусть для простоты $\alpha_2 = 1$. Подставив выражение (13) в (12), получим утверждение.

Для того чтобы уравнение (8) с помощью замены (3) приводилось к уравнению (11), необходимо и достаточно, чтобы

$$\left[J_1 - \frac{2}{3}\left(\frac{J_2' - \frac{1}{2}J_1''}{J_2 - \frac{1}{2}J_1'}\right)' + \frac{1}{9}\left(\frac{J_2' - \frac{1}{2}J_1''}{J_2 - \frac{1}{2}J_1'}\right)^2\right]\frac{1}{\sqrt[3]{\left(J_2 - \frac{1}{2}J_1'\right)^2}} = \alpha_1. \tag{14}$$

При этом общее решение уравнения (8) имеет вид

$$y = e^{-\frac{1}{3}\int p_1 dx}\,\frac{z(t)}{\sqrt[3]{J_2 - \frac{1}{2}J_1'}}, \quad t = \int \sqrt[3]{J_2 - \frac{1}{2}J_1'}\,dx.$$

где $z(t)$ — общее решение уравнения (11) при $\alpha_2 = 1$.

Если $J_2 - \frac{1}{2} J_1' = 0$, то уравнение (8) приводится к уравнению $z''' = 0$ с помощью замены

$$y = \frac{z(t)\, e^{\frac{1}{3}\int p_1 dx}}{g'}, \qquad t = g(x),$$

где $g(x)$ находится из уравнения

$$J_1 = 2\left(\frac{g''}{g'}\right)' - \left(\frac{g''}{g'}\right)^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. ИЛ, М., 1953.
2. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. ИЛ, М. 1954.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

РЕШЕНИЕ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М. С. Сявавко, Ю. Р. Батюк

1. Пусть H — некоторое гильбертово пространство, элементы которого будем обозначать x, y и т. д., R — действительная прямая. В пространстве H рассмотрим функционал $U(x)$. Производную Фреше и функциональную производную $U(x)$ будем обозначать U_x' и $\frac{\delta u}{\delta x(\tau)}$.

Рассмотрим уравнение

$$U_x' = f(x; U), \tag{1}$$

где $f(x; U)$ при фиксированных x и U принадлежит пространству H^* и является функционалом по x и функцией по U.

Уравнение (1) назовем вполне разрешимым, если начальное условие

$$U(x_0) = U_0 \tag{2}$$

однозначно определяет решение в некоторой окрестности точки x_0. Условие полной разрешимости задачи (1), (2) вытекает из теоремы Фробениуса (см. [1]).

Применим теорию цепных дробей к решению задачи (1), (2). Пусть $V_0(x)$ и $W_0(x)$ — первые нижнее и верхнее приближения решения уравнения (1). Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при фиксированном x функция*

$$\int_0^1 d\xi \int_a^b f(x_0 + \xi(x - x_0);\ U,\ \tau)\,[x(\tau) - x_0(\tau)]\,d\tau \tag{3}$$

монотонно убывает по U и положительна. Тогда при заданных функционалах $V_0(x)$ и $W_0(x)$ рекуррентные формулы

$$\frac{P_n}{Q_n} = U_0 + \int_0^1 d\xi \int_a^b f\left(x_0 + \xi(x - x_0);\ \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \tau\right)[x(\tau) - x_0(\tau)]\,d\tau, \tag{4}$$

где $\frac{P_0}{Q_0} = V_0(x)$, однозначно определяют сходящуюся к решению задачи Коши (1), (2) цепную дробь, подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ которой при дополнительном условии

$$U_0 + \int_0^1 d\xi \int_a^b f\left(x_0 + \xi(x - x_0);\ \frac{P_1}{Q_1},\ \tau\right)[x(\tau) - x_0(\tau)]\,d\tau \geqslant \frac{P_0}{Q_0}$$