Каждому подмножеству K_1, K_2, K_3 соответствует подматрица $B_1(x)$, $B_2(x)$, $B_3(x)$.

Матрица $B_1(x)$ разложима в произведение регулярных множителей тогда и только тогда, когда каждый блок, что соответствует определяющему многочлену $[(x-\alpha_i)^m]^{k_i}$, разложимый на множители тех же степеней.

Пусть подмножество K_2 состоит из определяющих многочленов

$$[(x-\alpha_{q_1})^{p_{q_1}}(x-\alpha_{q_2})^{p_{q_2}}\dots(x-\alpha_{q_l})^{p_{q_l}}]^{k_q},$$
$$[(x-\alpha_{s_1})^{p_{s_1}}(x-\alpha_{s_2})^{p_{s_2}}\dots(x-\alpha_{s_l})^{p_{s_l}}]^{k_s},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$[(x-\alpha_{t_1})^{p_{t_1}}(x-\alpha_{t_2})^{p_{t_2}}\dots(x-\alpha_{t_l})^{p_{t_l}}]^{k_t}.$$

Если можно выбрать $r_1, r_2, \dots, r_u$ такие, что

$$r_i = \Pi p_{q_i} = \Pi p_{s_i} = \cdots = \Pi p_{t_i}, \quad r_1 + r_2 + \cdots + r_u = m,$$

то

$$B_2(x) = C_1(x)\,C_2(x)\,\dots\,C_u(x),$$

где $C_i(x)$ $(i = 1, \dots, u)$ — регулярный многочлен степени r_i.

Теорема 2. *Если подматрицы $B_1(x)$, $B_2(x)$ соответствуют подмножествам K_1, K_2 определяющих многочленов матрицы* (1) *и разложимы в произведение регулярных множителей соответственно равных степеней, то и матрица* (1) *разложима.*

Следствие 3. Если определяющие многочлены подмножества K_i попарно взаимно просты с определяющими многочленами подмножества K_j $(i, j = 1, 2, 3)$, то условие теоремы 2 является необходимым и достаточным для разложимости матрицы (1) в произведение регулярных множителей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. «Наука», М., 1967, 206.
2. Казімірський П. С.— УМЖ, 1972, **24**, 3, 315.
3. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. «Наука и техника», Минск, 1966, 13.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г

ОБ АБСОЛЮТНОЙ РАЗЛОЖИМОСТИ МАТРИЧНОГО КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

В. М. Петричкович, М. А. Шуляр

Рассмотрим матричный квадратный трехчлен вида

$$A(x) = A_0x^2 + A_1x + A_2, \tag{1}$$

где A_i $(i = 0, 1, 2)$ — $n \times n$-матрицы над алгебраически замкнутым полем P нулевой характеристики, $\det A_0 \neq 0$ и все корни $\det A(x)$, которые обозначим через

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n} \tag{2}$$

— простые, т. е. $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \dots, 2n)$. Согласно [2], матричный трехчлен (1) раскладывается на линейные регулярные множители

$$A_0x^2 + A_1x + A_2 = (B_0x + B_1)(C_0x + C_1). \tag{3}$$

Определение 1. При выполнении равенства (3) будем называть $A(x)$ разложимым по тем n корням из выражения (2), которые совпадают с корнями $\det(B_0x + B_1)$.

Определение 2. Если $A(x)$ разложим по любым n корням из (2), то будем называть его абсолютно разложимым.

Обозначив корни $\det(B_0x + B_1)$ и $\det(C_0x + C_1)$ соответственно через

$$\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n', \tag{4}$$

$$\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_n'' \tag{5}$$

при помощи некоторых неособенных преобразований (T, T^{-1}) и (S^{-1}, S) над полем P из (3) получаем

$$TA(x)S = T(B_0x + B_1)T^{-1}TSS^{-1}(C_0x + C_1)S =$$

$$= \operatorname{diag}(x - \alpha_1', \ldots, x - \alpha_n')\, C \operatorname{diag}(x - \alpha_1'', \ldots, x - \alpha_n''),$$

где $C = TS$.

Таким образом, без ограничения общности будем рассматривать матричный трехчлен (1) в виде

$$A(x) = \operatorname{diag}(x - \alpha_1', \ldots, x - \alpha_n')\, C \operatorname{diag}(x - \alpha_1'', \ldots, x - \alpha_n''). \tag{6}$$

Исследуем условия абсолютной разложимости $A(x)$. Матрица $A_*(x)$, взаимная к $A(x)$, имеет вид

$$A_*(x) = \| c_{ij} f_{ij}(x) \|_{i,j=1}^{n}, \tag{7}$$

где c_{ij} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы C,

$$f_{ij}(x) = (x - \alpha_1'') \ldots (x - \alpha_{i-1}'')(x - \alpha_{i+1}'') \ldots (x - \alpha_n'')(x - \alpha_1') \ldots (x -$$

$$- \alpha_{j-1}')(x - \alpha_{j+1}') \ldots (x - \alpha_n'). \tag{8}$$

Из выражений (7) и (8) следует, что все строки матриц $A_*(\alpha_i'')$ нулевые, за исключением i-й $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и все столбцы матриц $A_*(\alpha_j')$, за исключением j-го $(j = 1, 2, \ldots, n)$, нулевые.

Составляем $n \times n$-матрицу, строками которой являются i-е строки матриц $A_*(\alpha_i'')$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и обозначим ее через

$$N = \| c_{ij} f_{ij}(\alpha_i'') \|_{i,j=1}^{n}. \tag{9}$$

Теорема. *Для того чтобы матричный квадратный трехчлен вида* (6) *был абсолютно разложим, необходимо и достаточно, чтобы все миноры k-го порядка* ($k = 1, 2, \ldots, n$) *матрицы N были отличны от нуля.*

Доказательство. Необходимость. Выбираем n произвольных корней из (2) таким образом, что k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ из них взяты из выражения (5), а остальные $n - k$ — из (4), т. е.

$$\alpha_{l_1}'', \alpha_{l_2}'', \ldots, \alpha_{l_k}'', \alpha_{s_1}', \alpha_{s_2}', \ldots, \alpha_{s_{n-k}}'. \tag{10}$$

Из предположения, что $A(x)$ абсолютно разложим, на основании данных работы [1] имеем

$$\operatorname{rang} \underset{A_*(x)}{M} [\alpha_{l_1}'', \alpha_{l_2}'', \ldots, \alpha_{l_k}'', \alpha_{s_1}', \alpha_{s_2}', \ldots, \alpha_{s_{n-k}}'] = n. \tag{11}$$

Учитывая структуру блоков $A_*(\alpha_l'')$ и $A_*(\alpha_j')$, получаем

$$\operatorname{rang} \underset{A_*(x)}{M} [\alpha_{l_1}'', \alpha_{l_2}'', \ldots, \alpha_{l_k}''] = k, \tag{12}$$

откуда следует, что все миноры k-го порядка $(k = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы N отличны от нуля.

Достаточность. Если все миноры k-го порядка $(k = 1, 2, \ldots, n)$ отличны от нуля, т. е. для произвольных k корней из (5) выполняется соотношение (12), то на основании того, что

$$\operatorname{rang} \underset{A_*(x)}{M} [\alpha_{s_1}', \alpha_{s_2}', \ldots, \alpha_{s_{n-k}}'] = n - k,$$

получаем, что для любых n корней вида (10) выполнимо соотношение (11), т. е. $A(x)$ абсолютно разложим.

Из теоремы следует, что если в выражении (6) C — матрица Якоби (тридиагональная матрица), т. е.

$$C = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^{n}, \ a_{ij} \in P, \ a_{ij} = 0 \text{ при } |i-j| \geqslant 2,$$

то матричный трехчлен вида (6) абсолютно разложим при a_{ij} ($|i-j| < 2$), отличных от элементов некоторого конечного подмножества поля P.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казимирский П. С.— УМЖ, 1972, **24**, 3, 315.
2. Теребейко Б. И.— Вестник Львовск. политехн. ин-та, 1965, 8, 67.

Львовский филиал
математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

ОБЩИЕ УСЛОВИЯ ПРИВОДИМОСТИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. М. Парасюк

Пусть имеем уравнение

$$z^{(n)} + \alpha_1(t) z^{(n-1)} + \cdots + \alpha_{n-1}(t) z' + \alpha_n(t) z = 0, \tag{1}$$

коэффициенты которого непрерывно дифференцируемы достаточное количество раз на интервале (α, β).

Приводимыми к уравнению (1) будем называть уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0, \tag{2}$$

которые можно привести к виду (1) с помощью некоторой замены переменных

$$t = g(x), \quad z = u(x) y, \tag{3}$$

где $u(x)$ и $g(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции до n-го порядка включительно, причем $u(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$.

Очевидно, что для приводимости уравнения (2) необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты имели вид

$$p_i(x) = \left(\alpha_i a_{n0} - \sum_{k=0}^{i-1} a_{n-k,i-k} p_k \right) a_{n-i,0}^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

$$a_{lm} = \sum_{j=1}^{l-m+1} a'_{l-j,m-1} (g')^{j-1} \quad (l, m = 1, 2, \ldots, n),$$

$$a_{l0} = u^{-1} (g')^l \quad (l = 0, 1, \ldots, n), \quad p_0 = 1. \tag{5}$$

Используя понятие семиинвариантов [1, 2], приведенное выше утверждение можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Для того чтобы уравнение* (2) *заменой* (3) *приводилось к уравнению* (1), *необходимо и достаточно, чтобы его семиинварианты имели вид*

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{n-j}{k+1-j} \tilde{A}_{k+1-j} \tilde{p}_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{6}$$

где $\tilde{A}_{j+1} = \tilde{A}'_j - \frac{1}{n} \tilde{p}_1 \tilde{A}_j$, $\tilde{A}_0 = 1$, *а функции* $\tilde{p}_j(x)$ *определяются из формул* (4) *с заменой функций* a_{lm} *на* $\tilde{a}_{lm}$, *причем*

$$\tilde{a}_{lm} = \sum_{i=1}^{l-m} \tilde{a}'_{l-i,m-1} (g')^{i-1} \quad (l, m = 1, 2, \ldots, n), \quad \tilde{a}_{l0} = (g')^l$$

$$(l = 0, 1, \ldots, n). \tag{7}$$