тогда функция

$$u(x) = G[q(x, y)], \quad x \in \Omega, \quad y \in S,$$

гармоническая в области Ω *и удовлетворяет граничному условию* (2).

Выполнение утверждений теоремы показывается непосредственной проверкой, используя лемму и предположения теоремы.

Теорема 2. *Разность двух гармонических функций в области* Ω, *удовлетворяющих одному и тому же граничному условию* (2), *равна нулю.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2 в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Г. С.— Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1969, 4.
2. Лопатинський Я. Б.— Наукові записки Львів. ун-ту, сер. фіз.-мат., 1953, 22, 5.

Львовский государственный университет, Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖИМОСТИ МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА С КОММУТИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА МНОЖИТЕЛИ

В. М. Петричкович

Рассмотрим матричный многочлен

$$A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_m, \tag{1}$$

где A_i — матрицы n-го порядка над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и $A_iA_j = A_jA_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Согласно [1, 3] многочлен (1) преобразованием подобия можно привести к квазидиагональной форме

$$PA(x)P^{-1} = B_1(x) \dotplus B_2(x) \dotplus \cdots \dotplus B_p(x) \tag{2}$$

с диагональными блоками

$$B_i(x) = \begin{bmatrix} x^m + \rho_i x^{m-1} + \cdots + \delta_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x^m + \rho_i x^{m-1} + \cdots + \delta_i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & (x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l} \end{bmatrix} \tag{3}$$

порядков k_i, причем $\det B_i(x) \neq \det B_j(x)$.

Определение. Многочлен $(x^m + \rho_i x^{m-1} + \cdots + \delta_i)^{k_i} = [(x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l}]^{k_i}$ назовем определяющим многочленом матрицы $A(x)$, а натуральное число k_i — порядком определяющего многочлена.

Лемма 1. Корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ многочлена $\det A(x)$ являются корнями одного определяющего многочлена $[(x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l}]^{k_i}$ матрицы $A(x)$ соответственно кратностей $s_1, \ldots, s_l$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} M_{A(x)}[\alpha_1^{(s_1)}, \ldots, \alpha_l^{(s_l)}] < n$ (матрица $M_{A(x)}[\alpha_1^{(s_1)}, \ldots, \alpha_l^{(s_l)}]$ вида [2]).

Порядок k_i определяющего многочлена $[(x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l}]^{k_i}$ матрицы (1) вычисляется по формуле

$$k_i = R_{\alpha_1} + R_{\alpha_1'} + \cdots + R_{\alpha_1^{(s_1-1)}} + \cdots + R_{\alpha_l} + R_{\alpha_l'} + \cdots + R_{\alpha_l^{(s_l-1)}}) -$$

$$-(R_{\alpha_1\alpha_1'} + R_{\alpha_1\alpha_1''} + \cdots + R_{\alpha_1^{(s_1-2)}\alpha_1^{(s_1-1)}} + \cdots + R_{\alpha_l\alpha_l'} + \cdots +$$

$$+ R_{\alpha_l^{(s_l-2)}\alpha_l^{(s_l-1)}}) + \cdots + (-1)^{m-1} R_{\alpha_1\alpha_1' \ldots \alpha_1^{(s_1-1)} \ldots \alpha_l \ldots \alpha_l^{(s_l-1)}}, \tag{4}$$

где

$$R_{\alpha_i} = \operatorname{rang} M_{\alpha_i}, \quad R_{\alpha_i^{(j)}} = \operatorname{rang} M_{\alpha_i^{(j)}},$$

$$R_{\alpha_i^{(t_i)}\alpha_j^{(t_j)} \ldots \alpha_l^{(t_l)}} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} M_{\alpha_i^{(t_i)}} \\ M_{\alpha_j^{(t_j)}} \\ \vdots \\ M_{\alpha_l^{(t_l)}} \end{bmatrix},$$

$$M_{\alpha_i} = \begin{bmatrix} A_*^{(p_i-m)}(\alpha_i) \\ A_*^{(p_i-(m-1))}(\alpha_i) \\ \vdots \\ A_*^{(p_i-1)}(\alpha_i) \end{bmatrix}, \quad M_{\alpha_i^{(j)}} = \begin{bmatrix} (A^{(j)})_*^{(q_i-m-j)}(\alpha_i) \\ (A^{(j)})_*^{(q_i-(m-j-1))}(\alpha_i) \\ \vdots \\ (A^{(j)})_*^{(q_i-1)}(\alpha_i) \end{bmatrix},$$

$A_*^{(l)}(x)$ — производная l-го порядка от взаимной матрицы $A_*(x)$; p_i — кратность корня α_i многочлена $\det A(x)$; q_i — кратность корня α_i многочлена $\det A^{(j)}(x)$.

На основании леммы 1 и формулы (4) вычисляется система определяющих многочленов, по которой записывается квазидиагональная форма (2) матрицы (1). Система определяющих многочленов матрицы (1) определяет соответствующую квазидиагональную форму для набора $(A_1, \ldots, A_m)$ попарно коммутирующих матриц.

Теперь рассмотрим матричный многочлен квазидиагонального вида

$$A(x) = A_0 x^r + A_1 x^{r-1} + \cdots + A_r = \begin{bmatrix} A_{11}(x) & & & 0 \\ & A_{22}(x) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{kk}(x) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где A_i — произвольные матрицы n-го порядка над данным полем и $|A_0| \neq 0$. Пусть многочлены $\det A_{11}(x), \ldots, \det A_{kk}(x)$ попарно взаимно просты.

Теорема 1. *Матричный многочлен* (5) *разложимый в произведение множителей*

$$A(x) = A_1(x) A_2(x) \ldots A_q(x), \tag{6}$$

где

$$A_i(x) = B_{i0} x^{r_i} + B_{i1} x^{r_i-1} + \cdots + B_{ir_i}, \quad |B_{i0}| \neq 0, \quad i = 1, \ldots, q,$$

тогда и только тогда, когда каждый блок $A_{jj}(x)$, $j = 1, \ldots, k$, *разложим на множители соответственно степеней* $r_1, \ldots, r_q$.

Следствие 1. Если для многочлена (5) имеет место разложение (6), то множители $A_i(x)$ невырожденным преобразованием Q могут быть приведены к квазидиагональному виду.

Лемма 2. *Многочлен* (1) *с определяющим многочленом* $[(x-\alpha_1)^{s_1}(x-\alpha_2)^{s_2} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l}]^n$ *имеет разложение на множители*

$$A(x) = A_1(x) A_2(x) \ldots A_l(x),$$

$$A_i(x) = B_{i0} x^{r_i} + B_{i1} x^{r_i-1} + \cdots + B_{ir_i}, \quad |B_{i0}| \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Следствие 2. Многочлен (1) с определяющим многочленом $[(x-\alpha_1) \ldots (x-\alpha_m)]^n$ разложимый в произведение линейных множителей.

Систему определяющих многочленов матрицы (1) разобьем на подмножества K_1, K_2, K_3 соответственно с определяющими многочленами вида

$$[(x-\alpha_i)^m]^{k_i}, \; [(x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_j)^{s_j}]^{k_j}, \; [(x-\alpha_1) \ldots (x-\alpha_m)]^{k_l}.$$

Каждому подмножеству K_1; K_2, K_3 соответствует подматрица $B_1(x)$, $B_2(x)$, $B_3(x)$.

Матрица $B_1(x)$ разложима в произведение регулярных множителей тогда и только тогда, когда каждый блок, что соответствует определяющему многочлену $[(x-\alpha_i)^m]^{k_i}$, разложимый на множители тех же степеней.

Пусть подмножество K_2 состоит из определяющих многочленов

$$[(x-\alpha_{q_1})^{p_{q_1}}(x-\alpha_{q_2})^{p_{q_2}}\dots(x-\alpha_{q_l})^{p_{q_l}}]^{k_q},$$
$$[(x-\alpha_{s_1})^{p_{s_1}}(x-\alpha_{s_2})^{p_{s_2}}\dots(x-\alpha_{s_l})^{p_{s_l}}]^{k_s},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$[(x-\alpha_{t_1})^{p_{t_1}}(x-\alpha_{t_2})^{p_{t_2}}\dots(x-\alpha_{t_l})^{p_{t_l}}]^{k_t}.$$

Если можно выбрать $r_1, r_2, \dots, r_u$ такие, что

$$r_i = \Pi p_{q_i} = \Pi p_{s_i} = \cdots = \Pi p_{t_i}, \quad r_1 + r_2 + \cdots + r_u = m,$$

то
$$B_2(x) = C_1(x)\,C_2(x)\,\dots\,C_u(x),$$

где $C_i(x)$ $(i = 1, \dots, u)$ — регулярный многочлен степени r_i.

Теорема 2. *Если подматрицы $B_1(x)$, $B_2(x)$ соответствуют подмножествам K_1, K_2 определяющих многочленов матрицы* (1) *и разложимы в произведение регулярных множителей соответственно равных степеней, то и матрица* (1) *разложима.*

Следствие 3. Если определяющие многочлены подмножества K_i попарно взаимно просты с определяющими многочленами подмножества K_j $(i, j = 1, 2, 3)$, то условие теоремы 2 является необходимым и достаточным для разложимости матрицы (1) в произведение регулярных множителей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. «Наука», М., 1967, 206.
2. Казімірський П. С.— УМЖ, 1972, **24**, 3, 315.
3. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. «Наука и техника», Минск, 1966, 13.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г

ОБ АБСОЛЮТНОЙ РАЗЛОЖИМОСТИ МАТРИЧНОГО КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

В. М. Петричкович, М. А. Шуляр

Рассмотрим матричный квадратный трехчлен вида

$$A(x) = A_0x^2 + A_1x + A_2, \tag{1}$$

где A_i $(i = 0, 1, 2)$ — $n \times n$-матрицы над алгебраически замкнутым полем P нулевой характеристики, $\det A_0 \neq 0$ и все корни $\det A(x)$, которые обозначим через

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n} \tag{2}$$

— простые, т. е. $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \dots, 2n)$. Согласно [2], матричный трехчлен (1) раскладывается на линейные регулярные множители

$$A_0x^2 + A_1x + A_2 = (B_0x + B_1)(C_0x + C_1). \tag{3}$$

Определение 1. При выполнении равенства (3) будем называть $A(x)$ разложимым по тем n корням из выражения (2), которые совпадают с корнями $\det(B_0x + B_1)$.

Определение 2. Если $A(x)$ разложим по любым n корням из (2), то будем называть его абсолютно разложимым.