К ТЕОРИИ МАГНИТОВАРИАЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ В ПОЛЕ СУББУРИ

А. И. Билинский, И. Н. Павлосюк

Пространственную структуру бухтообразных возмущений в средних широтах обычно объясняют токами, растекающимися по нижней ионосфере от авроральной электроструи [1, 8]. В работе [2] предложено магнитовариационное зондирование на поверхности плоской слоистой модели Земли в поле электрического диполя, помещенного в изотропной ионосфере. Однако при определении горизонтальной компоненты векторного потенциала полностью пренебрежено проводимостью ионосферы. В данной работе рассматривается магнитовариационное зондирование в поле локального источника с растеканием тока в ионосфере.

Горизонтальный электрический диполь с моментом $\vec{J}e^{-i\omega t}$, направленным вдоль оси x, расположим в начале прямоугольной системы координат на поверхности пятислойной среды с мощностями слоев h_1, h_2, h_3, h_4, ∞ и удельными электрическими сопротивлениями ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 соответственно. С целью упрощения вычислений идеализируем модель среды. При этом принимаем, что второй слой — атмосфера и четвертый слой — кристаллические породы Земли — диэлектрики, пятый слой — хорошо проводящее вещество мантии — идеальный проводник. Составляющие электромагнитного поля определим на поверхности Земли ($z = h_1 + h_2$).

Используя известные граничные условия и решения [4, 6], после несложных преобразований запишем компоненты векторного потенциала для нашей модели среды ($\rho_2 = \rho_4 = \infty$, $\rho_5 = 0$) в следующем виде:

$$A_x = \frac{J\mu}{\pi} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{m^2 e^{-n_1 h_1}}{n_3 (m + n_1)} \cdot \frac{(1 + R_1) R_3^{\bullet} j_0(mr)\, dm}{e^{mh_2}\left(1 + \frac{m}{n_3} R_3^{\bullet}\right)\left(R_1 + \frac{m}{n_1}\right) - e^{-mh_2}\left(1 - \frac{m}{n_3} R_3^{\bullet}\right)\left(R_1 - \frac{m}{n_1}\right)}, \tag{1}$$

$$A_z = \frac{J\mu}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{e^{-n_1 h_1}}{m + n_1} \cdot \frac{(1 + R_1) j_0(mr)\, dm}{e^{mh_2}\left(1 + \frac{m}{n_3} R_3^{\bullet}\right)\left(R_1 + \frac{m}{n_1}\right) - e^{-mh_2}\left(1 - \frac{m}{n_3} R_3^{\bullet}\right)\left(R_1 - \frac{m}{n_1}\right)},$$

где $R_1 = \operatorname{cth}\left(n_1 h_1 + \operatorname{arcth}\frac{m}{n_1}\right)$; $R_3^{\bullet} = \operatorname{cth}\left(n_3 h_3 + \operatorname{arcth}\frac{n_3}{m}\, th m h_4\right)$; $n_p = \sqrt{m^2 + k_p^2}$; m — параметр разделения; $k_p = \sqrt{-\frac{i\mu\omega}{\rho_p}}$ — волновая постоянная p-го слоя; $j_0(mr)$ — функция Бесселя I рода; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — горизонтальный радиус-вектор; i — мнимая единица; ω — круговая частота; $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *гн/м* — магнитная проницаемость (здесь и дальше используется система единиц СИ). Временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и дальше опущен.

Для дальнейшего упрощения подынтегральных выражений заменим тонкие проводящие слои — первый и третий — плоскостями с конечными поверхностными проводимостями, равными продольным проводимостям слоев. При этом перейдем в выражениях (1) к пределам

$$k_1^2 h_1 \to -i\mu\omega S_1 \quad \text{при } |k_1| \to \infty,\ h_1 \to 0;$$

$$k_3^2 h_3 \to -i\mu\omega S_3 \quad \text{при } |k_3| \to \infty,\ h_3 \to 0,$$

где $S_1 = \frac{h_1}{\rho_1}$ и $S_3 = \frac{h_3}{\rho_3}$ — продольные проводимости ионосферы и осадочного слоя Земли соответственно. Кроме того, воспользуемся условием больших удалений от источника. Нас интересует поле в средних широтах, где всегда $r_p/h_p \gg 1$. По известной теореме А. Н. Тихонова [9] это равносильно случаю малых m в формулах (1), так что вполне оправдано условие $mh_p \ll 1$. Меняя порядок интегрирования и предельного перехода и разлагая подынтегральные выражения в ряды по степеням mh_2 и mh_4, после несложных, но громоздких преобразований получим, ограничившись членами первого порядка малости:

$$A_x = \frac{J\mu}{2\pi} h_4 \int_0^\infty \frac{mj_0(mr)}{Q}\, dm, \tag{2а}$$

$$A_z = \frac{J\mu}{2\pi}(1 - i\mu\omega S_3 h_4)\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{j_0(mr)}{Q}\, dm, \tag{2б}$$

где

$$Q = (1 - i\mu\omega S_3 h_4)(1 - i\mu\omega S_1 h_2) - i\mu\omega S_1 h_4 - m(h_2 + h_4 - i\mu\omega S_3 h_2 h_4).$$

Интегралы (2) можно взять, применив принцип аналитического продолжения к интегралу

$$\int_0^\infty \frac{x^{\varepsilon-1} j\nu(ax)\, dx}{(x+b)^{\lambda+1}},$$

который при $\mathrm{Re}(\nu) > 0$, $\mathrm{Re}(\lambda + 1) > \mathrm{Re}(\varepsilon + \nu) > 0$ выражается суммой двух бесконечных рядов [5]. Сначала возьмем произвольный индекс ν функции Бесселя в интервале $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(\nu) < \frac{3}{2}$, а потом перейдем к пределу $\nu \to 0$. В итоге полученные ряды можно свести к функциям Струве H_0 и H_1. При этом в выражении (2б) необходимо сначала поменять порядок интегрирования и дифференцирования. Возможность такой замены легко доказать, используя интегральную функцию Бесселя [7]. Таким образом мы выразим составляющие поля в явном виде с помощью табулированных функций. Однако функции Струве и их асимптотика неудобны для анализа. Поэтому представим интегралы (2) в виде рядов, которые давали бы возможность ограничиться на больших удалениях первыми членами.

Используя условие малости m, заменим подынтегральные выражения в (2) степенными рядами и после этого проведем почленное интегрирование. В результате всех преобразований запишем окончательные выражения

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{J\mu}{\pi^2}\cdot\frac{h_4}{\psi r^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma^2\left(k+\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{qr}{2}\right)^{2k+1}}, \\ A_z &= \frac{J\mu}{2\pi}\,\frac{(1 - i\mu\omega S_3 h_4)\,x}{\psi r^2}\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{qr}{2}\right)^{2k+1}} - 1\right], \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\psi = (1 - i\mu\omega S_3 h_4)(1 - i\mu\omega S_1 h_2) - i\mu\omega S_1 h_4; \quad q = \frac{\psi}{h_2 + h_4 - i\mu\omega S_3 h_2 h_4}.$$

Для определения компонент напряженности поля необходимо еще найти производные векторного потенциала по вертикальной координате и $\rho\, \mathrm{div}\, \vec{A}$. В нашей модели среды раскрытие неопределенности $\rho_2\, \mathrm{div}\, \vec{A}$ при $\rho_2 \to \infty$ требует громоздких преобразований, поэтому находим исходное выражение $\rho_3\, \mathrm{div}\, \vec{A}$ в третьем слое, а потом на границе $z \to h_1 + h_2$. Не приводя соответствующих исходных выражений и дальнейших преобразований, аналогичных изложенным выше, запишем сразу окончательные выражения:

$$A'_x = -\frac{J\mu}{\pi^2}\cdot\frac{1-i\mu\omega S_3 h_4}{\Psi r^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma^2\left(k+\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{rq}{2}\right)^{2k+1}},$$

$$A'_z = -\frac{J\mu}{\pi^2}\cdot\frac{h_4}{\Psi r^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{rq}{2}\right)^{2k+1}},$$

$$\rho\,\mathrm{div}\,\vec{A} = -\frac{J\mu}{\pi}\cdot\frac{i\mu\omega h_4 x}{\Psi r^2}\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{rq}{2}\right)^{2k+1}}-1\right],$$

где штрих обозначает дифференцирование по z.

В итоге компоненты поля представлены знакочередующимися полусходящимися рядами. В средних широтах $|rq|>1$ и можно с достаточной точностью ограничиться первыми членами ряда. В таком приближении составляющие напряженности поля примут вид

$$\begin{aligned}
H_z &= \frac{J}{2\pi}\cdot\frac{h_4}{Pq^2}\cdot\frac{3y}{r^5},\\
H_y &= \frac{J}{2\pi}\cdot\frac{1-i\mu\omega S_3 h_4}{Pq}\left(\frac{y^2-x^2}{r^4}-\frac{1}{q}\cdot\frac{2y^2-x^2}{r^5}\right),\\
H_x &= \frac{J}{2\pi}\cdot\frac{1-i\mu\omega S_3 h_4}{Pq}\cdot\frac{2xy}{r^4}\left(1-\frac{1}{q}\cdot\frac{3}{2r}\right),\\
E_x &= -\frac{J}{2\pi}\cdot\frac{i\mu\omega h_4}{Pq}\left(\frac{y^2-x^2}{r^4}-\frac{1}{q}\,\frac{2y^2-x^2}{r^5}\right),\\
E_y &= \frac{J}{2\pi}\cdot\frac{i\mu\omega h_4}{Pq}\cdot\frac{2xy}{r^4}\left(1-\frac{1}{q}\cdot\frac{3}{2r}\right),
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$P = h_2 + h_4 - i\mu\omega S_3 h_2 h_4.$$

Вертикальная составляющая убывает с расстоянием почти на два порядка быстрее, чем горизонтальные составляющие, так что в средних широтах мы можем ограничиться первым членом ряда. Для горизонтальных компонент первый член ряда выпадает из общей закономерности и ненамного меньше второго, поэтому во многих случаях при анализе необходимо использовать два члена.

Выражения составляющих напряженности поля зависят от основных электрических характеристик среды, что позволяет провести анализ соотношений, используемых при глубинных электромагнитных исследованиях. Так, импеданс в поле, которое описывается формулами (4)

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = -\frac{i\mu\omega h_4}{1-i\mu\omega S_3 h_4},$$

полностью совпадает с асимптотическим представлением импеданса плоской волны для такой же модели геоэлектрического разреза [3]. Значит, в средних широтах магнитотеллурическое зондирование в поле суббури можно проводить по известным теории и методике, развитым для модели плоской волны.

Аналог импеданса в магнитовариационном зондировании (МВЗ) запишем, ограничившись только первыми членами при $x = 0$, $y = r$:

$$\frac{H_z}{H_y} = \frac{3h_4}{r^2}\cdot\frac{h_2+h_4-i\mu\omega S_3 h_2 h_4}{(1-i\mu\omega S_3 h_4)}. \tag{5}$$

При выводе этой формулы использованы условия $S_1 < S_3$ и $|i\mu\omega S_1 h_2| \ll 1$, что верно при $S_1 \leqslant 10$ *сим* и $T \geqslant 10^3$ *сек*. Теперь, переходя к длиннопериодной асимптотике в выражении (5), получаем

$$\left| \frac{H_z}{H_y} \right| = \frac{3h_4(h_2 + h_4)}{r^2}. \tag{6}$$

Значит, в поле источника с растеканием тока в ионосфере при МВЗ зондируем не только Землю, но и ионосферу.

Учитывая два члена в выражениях (4), вместо (6) записываем

$$\left| \frac{H_z}{H_y} \right| = \frac{3h_4(h_2 + h_4)}{r[r - 2(h_2 + h_4)]}. \tag{7}$$

Из формулы (7) непосредственно оцениваются расстояния, для которых можно использовать формулы (4) и (5), т. е. $r > 2(h_2 + h_4)$. Здесь мы рассмотрели асимптотику МВЗ, минуя общепринятый анализ кажущегося удельного сопротивления. Чтобы восполнить этот пробел, проанализируем выражения составляющих поля на поверхности не трехслойного, а многослойного разреза. При этом источник расположим в ионосфере, которую заменим плоскостью S_1. Используя рекуррентные формулы, в исходных выражениях (1) заменим функцию R_3^* соответствующей функцией для N-слойного разреза. После перехода к пределу $|k_1| \to \infty$, $h_1 \to 0$ разложим подынтегральные выражения в степенные ряды при условии $r \to \infty$ $(m \to 0)$, следуя работе [2]. Не приводя промежуточных выкладок, запишем окончательные выражения, ограничившись первыми членами:

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{3y}{r^5} \cdot \frac{h_2 \dfrac{k_3}{R} - 1}{\left[\dfrac{k_3}{R} - i\mu\omega S_1 \left(\dfrac{k_3}{R} h_2 + 1\right)\right]^2}, \\ H_y &= \frac{J}{2\pi} \left\{ \frac{y^2 - x^2}{\left[1 - i\mu\omega S_1 \left(h_2 + \dfrac{R}{k_3}\right)\right] r^4} - \frac{\left(h_2 + \dfrac{R}{k_3}\right)(2y^2 - x^2)}{\left[1 - i\mu\omega S_1 \left(h_2 + \dfrac{R}{k_3}\right)\right]^2 r^5} \right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $R = \operatorname{cth}\left[k_3 h_3 + \operatorname{arcth}\dfrac{k_3}{k_4} \operatorname{cth}\left(k_4 h_4 + \cdots + \operatorname{arcth}\dfrac{k_{N-1}}{k_N}\right)\right]$ — известная импедансная функция $\left(Z = -\dfrac{i\mu\omega}{k_3} R\right)$. Следует отметить, что формулы (8) переходят в соответствующие формулы работы [2] при условии $S_1 = 0$. Из них, пренебрегая величинами $|j\mu\omega S_1 h_2|$ и $|i\mu\omega S_1 r|$, при условиях $\dfrac{r}{3}\left|\dfrac{H_z}{H_y}\right| \simeq$ $\simeq h_2$ и $r^2 \left|\dfrac{H_z}{H_y}\right| \gg h_2$ получаем известный результат, т. е.

$$\rho_T = \mu\omega \left| \frac{R}{k_3} \right|^2 = \mu\omega \frac{r^2}{3} \left| \frac{H_z}{H_y} \right|.$$

Таким образом, при учете токов растекания в ионосфере кажущееся удельное сопротивление МВЗ можно выразить в общепринятой форме только при очень грубых допущениях, при которых фактически пренебрегаем влиянием ионосферы на формирование структуры поля в средних широтах. Однако при отсутствии частотной зависимости отношений амплитуд вертикальной и горизонтальной составляющих поля, что характерно для бухтообразных возмущений, можно получить асимптотику МВЗ непосредственно из аналога импеданса. При этом, как видно из выражений (6) и (7), определение глубины залегания высокопроводящего вещества мантии возможно только при известных высоте и удалении источника.

Поле, описываемое формулами (4), убывает с расстоянием быстрее наблюдаемого в средних широтах поля суббури. Это обуславливает завышение получаемых при интерпретации МВЗ глубин залегания высокопроводящего слоя в мантии. Учет значительной протяженности ионосферной электроструи порядка 3000—5000 *км* частично устраняет такое фиктивное увеличение глубин. Следовательно, при МВЗ необходимо знать точно размеры источника, что значительно усложняет задачу зондирований. Соответствующий количественный анализ здесь проводить нецелесообразно, так как основные трудности практической реализации частотных зондирований обусловлены существенной неоднородностью проводящей слоистой среды — Земли. Оценим это влияние в рамках нашей модели, введя в нее одномерную неоднородность продольной проводимости ΔS_3. Влияние неоднородности учтем в виде вторичного (аномального) поля, созданного индуцированными токами. Легко показать, что в окрестности неоднородности отношение аномального поля к нормальному для вертикальной составляющей пропорционально расстоянию r и градиенту S_3. Значит, в средних широтах, где $r \geqslant 2 \cdot 10^6$ *м*, даже незначительные градиенты продольной проводимости осадочного слоя Земли могут создать аномальные поля, превышающие по величине вертикальную составляющую первичного происхождения. Соответственно глубины, определяемые в МВЗ, будут увеличиваться в два-три раза при переходе от щита к прогибу.

Проведенный анализ показывает, что при магнитовариационном зондировании в поле суббури необходимо знать координаты и размеры ионосферного источника и использовать только нормальную часть возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акасофу С. И. Полярные и магнитосферные суббури. «Мир», М., 1971.
2. Бердичевский М. Н., Ваньян Л. Л., Осипова И. Л.— Физика Земли, 1972, 1.
3. Бондаренко А. П., Билинский А. И.— Геофизика и астрономия, 1967, 11.
4. Ваньян Л. Л.— Прикладная геофизика, 1959, 23.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. I. ИЛ, М., 1949.
6. Давыдов В. М. Теория низкочастотных электромагнитных полей в средах с тонкими анизотропными слоями и ее геофизическое приложение. СО «Наука», Новосибирск, 1971.
7. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложение. Физматгиз, М.— Л., 1963.
8. Литинский В. М.— Автореферат канд. дис. ИЗМИРАН, М., 1971.
9. Тихонов А. Н.— ДАН СССР, 1959, 5.

Львовский филиал
математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.