

4. Кит Г. С., Лысый И. П.— ИФЖ, 1972, 22, 1.
 5. Прикладные вопросы вязкости разрушения. «Мир», М., 1968.
 6. Сметанин Б. И.— Инженерный журнал, МТТ, 1968, 2.

Львовский филиал математической физики
 Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
 в ноябре 1973 г.

ВЛИЯНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ С ИНОРОДНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И ТРЕЩИНОЙ

Ю. С. Френчко

Рассматривается задача об определении термоупругого состояния неограниченной изотропной плоскости с инородным круговым включением и прямолинейной трещиной, находящейся на продолжении диаметра включения, когда на бесконечности задан однородный тепловой поток. Аналогичная задача для случая, когда плоскость с включением и трещиной растягивается приложенными на бесконечности постоянными усилиями, решена в приближенной постановке в работах [1, 6, 9], а в статье [11] сведена к решению сингулярного интегрального уравнения.

1. Пусть в бесконечной плоскости имеется упругое включение радиуса R с иными физико-механическими свойствами, а на продолжении диаметра вдоль оси Ox находится трещина ($a \leq x \leq b$). Определим термоупругое состояние плоскости и включения, когда на бесконечности задан однородный тепловой поток, считая при этом, что трещина свободна от напряжений, а на границе γ включения и связующего выполняются условия идеального механического и теплового контакта

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\sigma) + i\sigma_{\rho\theta}^{(1)}(\sigma) = \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\sigma) + i\sigma_{\rho\theta}^{(2)}(\sigma) = \omega(\sigma), \quad (1)$$

$$u_1(\sigma) + iv_1(\sigma) = u_2(\sigma) + iv_2(\sigma) = u(\sigma) + iv(\sigma),$$

$$T_1(\sigma) = T_2(\sigma) = T(\sigma), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1(\sigma)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(\sigma)}{\partial \rho}, \quad \sigma \in \gamma. \quad (2)$$

Здесь индексами 1 и 2 обозначены все характеристики, относящиеся соответственно к плоскости и включению; λ — коэффициент теплопроводности; $T(x, y)$ — температура; $\sigma_{\rho\rho}(\sigma)$, $\sigma_{\rho\theta}(\sigma)$, $u(\sigma)$, $v(\sigma)$ — компоненты напряжений и перемещений.

2. Определим температурное поле и напряженное состояние в плоскости с включением при заданном вдали от включения распределении температуры

$$T(x, y) = 2\operatorname{Re} F(z), \quad F(z) = a_1 z + \frac{1}{2} t_0, \quad (3)$$

где $a_1 = qRe^{-i\alpha}/2\lambda_1$; α — угол, образованный направлением теплового потока \vec{q} с осью Ox ; t_0 — постоянная температура; $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho = \frac{r}{R}$.

Выражая комплексный потенциал температуры через неизвестную пока температуру $T(\sigma)$ на окружности γ и удовлетворяя условию идеального теплового контакта (2), получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{T'(\sigma) d\sigma}{\sigma - \sigma_0} = c \left(a_1 + \frac{\bar{a}_1}{\sigma_0^2} \right), \quad \sigma_0, \sigma \in \gamma, \quad (4)$$

где $c = \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Решив это уравнение, найдем [5]

$$T(\sigma) = c \left(a_1 \sigma + \frac{\bar{a}_1}{\sigma} \right), \quad (5)$$

после чего распределение температуры в плоскости и включении будет

$$F_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{T(\sigma) d\sigma}{\sigma - z} + a_1 z - \frac{\bar{a}_1}{z} + \frac{t_0}{2},$$

$$F_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{T(\sigma) d\sigma}{\sigma - z} + \frac{t_0}{2}$$

или, после вычисления интегралов,

$$F_1(z) = a_1 z + \frac{d\bar{a}_1}{z} + \frac{t_0}{2}, \quad F_2(z) = ca_1 z + \frac{t_0}{2}, \quad (6)$$

где

$$d = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Известно [4, 8], что компоненты напряжений и перемещений можно выразить через комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, тогда граничные условия для областей, ограниченных окружностью, имеют вид

$$\Phi_s(\sigma) + \overline{\Phi_s(\sigma)} - \frac{1}{\sigma} \overline{\Phi'_s(\sigma)} - \frac{1}{\sigma^2} \overline{\Psi_s(\sigma)} = \omega(\sigma), \quad (7)$$

$$2G_s \left(\frac{\partial u_s}{\partial \theta} + i \frac{\partial v_s}{\partial \theta} \right) = i\sigma \left[\kappa_s \Phi_s(\sigma) - \overline{\Phi_s(\sigma)} + \frac{1}{\sigma} \overline{\Phi'_s(\sigma)} + \frac{1}{\sigma^2} \overline{\Psi_s(\sigma)} + m_s F_s(\sigma) \right], \quad s = 1, 2, \quad (8)$$

где $G = E/2(1 + \nu)$ — модуль сдвига; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; $\kappa = 3 - 4\nu$, $m = 2\alpha_t E$ — в случае плоской деформации; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, $m = 2\alpha_t E/(1 + \nu)$ — для плоского напряженного состояния; α_t — коэффициент линейного температурного расширения.

Решая отдельно первую основную задачу для плоскости с круговым отверстием и для круга, из условия (7) находим

$$\Phi_s(z) = \frac{(-1)^s}{2\pi i z} \int_{\gamma} \frac{\sigma \omega(\sigma) d\sigma}{\sigma - z} + \chi_{1s}(z), \quad (9)$$

$$\Psi_s(z) = \frac{(-1)^{s+1}}{2\pi i z} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)} d\sigma}{\sigma(\sigma - z)} + \frac{1}{z^2} \Phi_s(z) - \frac{1}{z} \Phi'_s(z) + \chi_{2s}(z). \quad (10)$$

Здесь

$$\chi_{11}(z) = \frac{1}{z} \lim_{z \rightarrow \infty} z \Phi_1(z), \quad \chi_{12}(z) = -\overline{\Phi_2(0)},$$

$$\chi_{21}(z) = \frac{1}{z} \lim_{z \rightarrow \infty} z \Psi_1(z), \quad \chi_{22}(z) = -\frac{1}{z^2} \Phi_2(0).$$

Удовлетворив условию (8), для определения $\omega(\sigma)$ получим сингулярное интегральное уравнение

$$M\omega(\sigma_0) + \frac{N}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma) d\sigma}{\sigma - \sigma_0} = f(\sigma_0), \quad (11)$$

где

$$f(\sigma) = 2[G_2 m_1 F_1(\sigma) - G_1 m_2 F_2(\sigma) - G_1(\kappa_2 + 1)\chi_{12}(\sigma) + G_2(\kappa_1 + 1)\chi_{11}(\sigma)],$$

$$M = G_1(\kappa_2 - 1) - G_2(\kappa_1 - 1), \quad N = G_2(\kappa_1 + 1) + G_1(\kappa_2 + 1).$$

Решение уравнения (11) имеет вид [5]

$$\omega(\sigma) = \frac{\Gamma m_1 - m_2 c}{\kappa_2 + \Gamma} a_1 \sigma, \quad \Gamma = \frac{G_2}{G_1}. \quad (12)$$

Подставив это выражение в (9) и (10) с учетом выражения для a_1 , найдем:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{K_1 e^{i\alpha}}{2z}, \quad \Psi_1(z) = \frac{K_1 e^{-i\alpha}}{2z} + \frac{K_0}{z^2} + \frac{K_1 - K_2}{z^3} e^{i\alpha}, \\ \Phi_2(z) &= K_2 e^{-i\alpha z} - \frac{1}{2} K_0, \quad \Psi_2(z) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$K_1 = -\frac{m_1 dqR}{\lambda_1 (\kappa_1 + 1)}, \quad K_2 = \frac{(\Gamma m_1 - cm_2) qR}{2\lambda_1 (\kappa_2 + \Gamma)}, \quad K_0 = \frac{(m_2 - \Gamma m_1) t_0}{\kappa_2 + 2\Gamma - 1}.$$

Выпишем напряжения, возникающие в плоскости на оси Ox , которые потребуются в дальнейшем:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_0}{x^2} + \left(K_1 - \frac{K_2 - K_1}{x^2} \right) \frac{\cos \alpha}{x}, \quad \sigma_{xy} = - \left(K_1 + \frac{K_2 - K_1}{x^2} \right) \frac{\sin \alpha}{x}. \quad (14)$$

3. Для определения напряженного состояния в плоскости с включением и трещиной используем представление трещины как непрерывно распределенные на промежутке $a \leq x \leq b$ дислокации с неизвестной плотностью $g(x)$. Требуя, чтобы суммарные напряжения $\sigma_{yy}(x, 0)$ и $\sigma_{xy}(x, 0)$, обусловленные дислокациями и температурным полем, равнялись на берегах трещины нулю, получаем сингулярное интегральное уравнение для определения плотности $g(x)$. Такой подход к решению задачи предложен в работах [10, 11]. При этом сингулярное интегральное уравнение имеет вид

$$\int_a^b \frac{g(\xi) d\xi}{\xi - x} - \int_a^b g(\xi) H(\xi; x) d\xi = \frac{\sigma_{ij}(x, 0)}{D}, \quad (i, j = x, y), \quad (15)$$

где $\sigma_{ij}(x, 0)$ — известные температурные напряжения, определяемые формулами (14),

$$\begin{aligned} H(\xi, x) &= -\frac{(A+B)R}{2\omega} + \frac{A(1-\beta^2)R^2}{\beta\omega^2} + \frac{A(1-\beta^2)^2 R^3}{\beta^4\omega^3} + \frac{(A+B)R}{2x} + \\ &+ \frac{[A(2\beta^2-1) + C(\kappa_2+1) - 1]R^2}{2\beta x^2} + \frac{AR^3}{x^3} \quad \text{при } i=j=y, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} H(\xi, x) &= -\frac{(A+B)R}{2\omega} + \frac{A(1-\beta^2)R^2}{\beta^3\omega^2} + \frac{A(1-\beta^2)^2 R^3}{\beta^4\omega^3} + \frac{(A+B)R}{2x} + \\ &+ \frac{(B-A)R^2}{2\beta x^2} - \frac{AR^3}{x^3} \quad \text{при } i=x, j=y. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$A = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma\kappa_1}, \quad B = \frac{\kappa_2 - \Gamma\kappa_1}{\kappa_2 + \Gamma}, \quad C = \frac{\Gamma(\kappa_1 + 1)}{(\kappa_2 + \Gamma)(\kappa_2 - 1 + 2\Gamma)},$$

$$D = \frac{2G_1}{\pi(\kappa_1 + 1)R}, \quad \omega = x - \frac{R^2}{\xi}, \quad \beta = \frac{\xi}{R}.$$

Сделав в уравнении (15) замену переменных $x = (b-a)(x_* + V)/2$, $\xi = (b-a)(\xi_* + V)/2$, $R = (b-a)R_*/2$, $V = (b+a)/(b-a)$, приходим к уравнению

$$\int_{-1}^1 \frac{g_*(\xi_*) d\xi_*}{\xi_* - x_*} = \frac{b-a}{2R} \int_{-1}^1 g_*(\xi_*) H_*(\xi_*, x_*) d\xi_* + \sigma_*(x_*), \quad (18)$$

где

$$g_*(\xi_*) = g(\xi), \quad H_*(\xi_*, x_*) = H(\xi, x), \quad \sigma_*(x_*) = \frac{\sigma_{ij}(x, 0)}{D}.$$

Используя формулу обращения интеграла типа Коши [3], после изменения

порядка интегрирования и замены $g_*(\eta)$ на $g_0(\eta)/\sqrt{1-\eta^2}$, получаем уравнение Фредгольма второго рода

$$g_0(\eta) = Q(\eta) - \int_{-1}^1 \frac{g_0(\xi_*) P(\xi_*, \eta) d\xi_*}{\sqrt{1-\xi_*^2}}, \quad (19)$$

где

$$P(\xi_*, \eta) = \frac{b-a}{2\pi^2 R} \int_{-1}^1 \frac{H_*(\xi_*, x_*) \sqrt{1-x_*^2} dx_*}{x_* - \eta},$$

$$Q(\eta) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_*(x_*) \sqrt{1-x_*^2}}{x_* - \eta} dx_*.$$

Если в уравнении (19) произвести замену $x_* = \cos \theta$, $\eta = \cos \varphi$, то полученное уравнение

$$g_0(\cos \varphi) + \int_0^\pi g_0(\cos \varphi) P(\cos \theta, \cos \varphi) d\theta = Q(\cos \varphi) \quad (20)$$

можно решить одним из приближенных методов [10].

Определив $g_0(x_*)$, найдем напряжения на оси Ox

$$\frac{\sigma_{ij}(x_*, 0)}{D} = \int_{-1}^1 \frac{g_*(\xi_*) d\xi_*}{\xi_* - x_*} - \frac{b-a}{2R} \int_{-1}^1 g_*(\xi_*) H_*(\xi_*, x_*) d\xi_*. \quad (21)$$

Если учитывать только особенную часть интегралов уравнений (19) и (21), то при $x_* \rightarrow \pm 1$ будем иметь

$$\lim_{x_* \rightarrow \pm 1} \frac{\sigma_{ij}(x_*, 0)}{D} = \frac{\sqrt{R} k_{\pm 1}}{D \sqrt{(b-a)(x_* \mp 1)}}, \quad (22)$$

где $k_{\pm 1} = \mp D\pi \sqrt{\frac{b-a}{2R}} g_0(\pm 1)$ — коэффициенты интенсивности нормальных напряжений в окрестности концов трещины $x_* = \pm 1$.

В работах [1, 2, 6, 9] получено приближенное решение задачи об определении предельно-равновесного состояния плоскости с инородным включением и трещиной при заданном постоянном силовом воздействии. Аналогичное приближенное решение в нашем случае может быть получено из уравнения (19), если положить $P(\xi_*, \eta) = 0$. Коэффициенты интенсивности напряжений определяются аналогично [4], т. е.

$$K_{\pm 1} = -\frac{D}{\pi} \sqrt{\frac{b-a}{2R}} \int_{-1}^1 \sigma_*(x_*) \sqrt{\frac{1 \pm x_*}{1 \mp x_*}} dx_*. \quad (23)$$

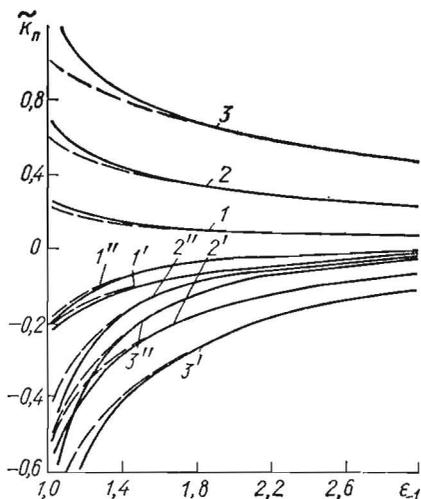
4. Пусть тепловой поток направлен параллельно трещине ($\alpha = \pi$). Полагая в (14) $\alpha = \pi$, а затем подставляя полученные выражения для напряжений в (19) и (23), находим точное и приближенное решения задачи. В частности, для последнего случая коэффициенты интенсивности напряжений выражаются формулами

$$k_{\pm 1} = \tilde{k}_0 K_0 + \tilde{k}_1 K_1 + \tilde{k}_2 (K_2 - K_1),$$

где

$$\tilde{k}_0 = \frac{\varepsilon_{+1} - \varepsilon_{-1}}{\sqrt{2} \varepsilon_{\pm 1} \delta}, \quad \delta \tilde{k}_1 = \pm (\varepsilon_{\mp 1} - \sqrt{\varepsilon_{-1} \varepsilon_{+1}}) \sqrt{2}, \quad \tilde{k}_2 = \pm \frac{3\varepsilon_{\mp 1}^2 - 2\varepsilon_{-1} \varepsilon_{+1} - \varepsilon_{\pm 1}^2}{4\sqrt{2} \varepsilon_{\mp 1} \varepsilon_{\pm 1} \delta},$$

$$\varepsilon_{-1} = \frac{a}{R}, \quad \varepsilon_{+1} = \frac{b}{R}, \quad \delta = \sqrt{\varepsilon_{-1} \varepsilon_{+1} (\varepsilon_{+1} - \varepsilon_{-1})}.$$



На рисунке построены для левого конца трещины зависимости величины \tilde{k}_n ($n = 0, 1, 2$) от расстояния ϵ_{-1} этого конца до включения, если $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\Gamma = 1/3$ и длина трещины $l = \epsilon_{+1} - \epsilon_{-1} = 0, 1; 1; 9$ (значениям $l = 0, 1; 1; 9$ соответствуют кривые 1, 2, 3 при $n = 0$; 1', 2', 3' при $n = 1$; 1'', 2'', 3'' при $n = 2$). Как и следовало ожидать, эти величины уменьшаются с увеличением расстояния трещины до включения. Точные (сплошные линии) и приближенные (штриховые линии) значения уже на расстоянии одного радиуса от включения до левого конца трещины отличаются в наихудшем случае (длина трещины $l = 9$) не более чем на 1,5% и совпадают до пятого знака включительно для трещины длиной 0,1. Следует отметить,

что, начиная с расстояния $\epsilon_{-1} \approx 1,5$, отношение $\frac{G_2}{G_1} = \Gamma$ практически не влияет на величины \tilde{k}_n , т. е. коэффициенты интенсивности напряжений в основном будут зависеть от тепловых характеристик материалов (α_1, λ), которые входят в $K_0, K_1, K_2 - K_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Труш И. И.— ФХММ, 1970, 5.
2. Бережницкий Л. Т., Труш И. И.— У кн.: Питання ФХММ. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1969.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.
6. Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т., Труш И. И.— ФХММ, 1971, 1.
7. Подстригач Я. С., Гайвась И. В.— Прикладная механика, 1966, 2, 3.
8. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1972.
9. Труш И. И., Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т.— ФХММ, 1972, 6.
10. Atkinson С.— Int. J. Engng. Sci., 1972, 10, 1.
11. Atkinson С.— Int. J. Engng. Sci., 1972, 10, 2.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.

СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА

А. Е. Андрейкив

Рассмотрим термостатическую задачу для полупространства, на границе которого $z = 0$ задано одно из следующих температурных условий:

$$\begin{aligned}
 1) \quad T_{z=0} &= T_0(x, y) && \text{при } (x, y) \in \Delta; \\
 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \gamma(x, y) && \text{при } (x, y) \in S;
 \end{aligned} \tag{1}$$