

типов колебаний, причем на нулевой тип колебаний влияет величина отношения $\frac{E_1}{G_{13}}$, особенно для высоких частот. Для высших типов колебаний влияние анизотропии материала наблюдается для больших фазовых скоростей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В.— В кн.: Инженерный сборник. Изд-во АН СССР, М., 1956, 24.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. Гостехиздат, М., 1955.
3. Мнев Е. Н.— Прикладна механіка, 1963, 9, 2.
4. Швец Р. Н., Лунь Е. И.— Прикладная механика, 1971, 7, 10.
5. Швец Р. Н., Флячок В. М.— Прикладная механика, 1973, 9, 11.
6. Lipton C., Morgan G. W.— J. of Acoustical Society of America, 1956, 28, 6.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1973 г.

ИЗГИБ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННЫМ ПО КОНТУРУ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

В. А. Лазько, С. А. Пелех

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние бесконечной трансверсально изотропной плиты с круговым отверстием, подкрепленным широким упругим кольцом, геометрические и физические характеристики которого отличны от характеристик плиты; плита деформируется «на бесконечности» равномерно распределенными изгибающими моментами M .

Если кольцо достаточно широкое и имеет постоянную толщину, то его можно рассматривать как пластинку [2].

В рамках обобщенной теории изгиба трансверсально изотропных пластинок задача заключается в нахождении решений уравнений

$$\Delta \Delta w_j = 0, \quad \Delta \varphi_j - \delta_j^2 \varphi_j = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

где индексом «1» будем отмечать величины, относящиеся к плите, индексом «2» — величины, относящиеся к кольцу.

Все расчетные величины (углы поворота нормального волокна $\gamma_\rho^{(j)}$ и $\gamma_\theta^{(j)}$, перерезывающие усилия $N_\rho^{(j)}$ и $N_\theta^{(j)}$, изгибающие моменты $M_\rho^{(j)}$ и $M_\theta^{(j)}$ и крутящий момент $H_{\rho\theta}^{(j)}$) выражаются через функции прогибов w_j и углов поворота φ_j [1].

Решения уравнений (1), соответствующие рассматриваемому случаю, с учетом условий «на бесконечности» запишутся так: для пластинки ($\rho \geq a$)

$$w_1 = -\frac{M\rho^2}{4D_1(1-\nu_1)} [1 - \nu_1 + (1 + \nu_1) \cos 2\theta] + c_1^{(1)} \ln \rho + (c_2^{(1)} \rho^{-2} + c_3^{(1)}) \cos 2\theta, \quad (2)$$

$$\varphi_1 = c_4^{(1)} K_0(\delta_1 \rho) + c_5^{(1)} K_2(\delta_1 \rho) \sin 2\theta;$$

для кольца ($b \leq \rho \leq a$)

$$\begin{aligned} w_2 &= c_1^{(2)} \ln \rho + (c_2^{(2)} \rho^{-2} + c_3^{(2)}) \cos 2\theta + d_1 \rho^2 + \rho^2 (d_2 + d_3 \rho^2) \cos 2\theta, \\ \varphi_2 &= c_4^{(2)} K_0(\delta_2 \rho) + c_5^{(2)} K_2(\delta_2 \rho) \sin 2\theta + d_4 I_0(\delta_2 \rho) + d_5 I_2(\delta_2 \rho) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\delta_j^2 = 6k'(1 + \nu_j) h_j^{-2} \frac{G_j'}{E_j}$; k' — коэффициент сдвига; E_j , ν_j — упругие постоянные в плоскости изотропии, совпадающей со срединной; G_j' — модуль сдвига в плоскости, нормальной к срединной; $2h_j$ — толщина; $C_m^{(j)}$, d_m — произвольные постоянные; $I_n(\delta_j \rho)$, $K_n(\delta_j \rho)$ — модифицированные функции Бесселя I и II рода соответственно; ρ , θ — полярные координаты.

На контуре спая плиты и включения (при $\rho = a$) должны выполняться условия непрерывности деформаций и напряжений

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2, \quad \gamma_\rho^{(1)} = \gamma_\rho^{(2)}, \quad \gamma_\theta^{(1)} = \gamma_\theta^{(2)}; \\ M_\rho^{(1)} = M_\rho^{(2)}, \quad N_\rho^{(1)} = N_\rho^{(2)}, \quad H_{\rho\theta}^{(1)} = H_{\rho\theta}^{(2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

По теории Кирхгофа [2], в этой задаче выполняется лишь четыре условия этого типа. Выполнение шести условий (4) приводит в итоге к решению в более высокой степени взаимосвязи на границе раздела двух сред. Кроме того, решения (3) должны удовлетворять граничным условиям на внутреннем контуре кольца. Если последний свободен от внешних усилий, то такими условиями будут

$$M_\rho^{(2)} = N_\rho^{(2)} = H_{\rho\theta}^{(2)} = 0 \quad (\text{при } \rho = b). \quad (5)$$

По известным формулам [1] для внутренних деформационных и силовых факторов получим:

для пластинки

$$\begin{aligned} \gamma_\rho^{(1)} = -c_1^{(1)} \rho^{-1} + \Pi_1^{(1)}(c_m^{(1)}, \rho) \cos 2\theta + \frac{M\rho}{2D_1(1-\nu_1)} [1 - \nu_1 + (1 + \nu_1) \cos 2\theta], \\ \gamma_\theta^{(1)} = -c_4^{(1)} \delta_1 K'_0(\delta_1 \rho) + \Pi_2^{(1)}(c_m^{(1)}, \rho) \sin 2\theta - \frac{M\rho}{2D_1(1-\nu_1)} \sin 2\theta, \\ N_\rho^{(1)} = -D_1 \Pi_3^{(1)}(c_m^{(1)}, \rho) \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (6)$$

$$M_\rho^{(1)} = -D_1 [-c_1^{(1)} (1 - \nu_1) \rho^{-2} + \Pi_4^{(1)}(c_m^{(1)}, \rho)] + \frac{M}{2} (1 + \cos 2\theta),$$

$$H_{\rho\theta}^{(1)} = -D_1 (1 - \nu_1) \left[-\frac{1}{2} c_4^{(1)} \rho^{-2} Q_1^{(1)}(\delta_1 \rho) + \Pi_5^{(1)}(c_m^{(1)}, \rho) \sin 2\theta \right] - \frac{M}{2} \sin 2\theta;$$

для кольца

$$\begin{aligned} \gamma_\rho^{(2)} = -c_1^{(2)} \rho^{-2} + \Pi_1^{(2)}(c_m^{(2)}, \rho) \cos 2\theta - 2d_1 \rho + R_1(d_m, \rho) \cos 2\theta, \\ \gamma_\theta^{(2)} = -c_4^{(2)} \delta_2 K'_0(\delta_2 \rho) + \Pi_2^{(2)}(c_m^{(2)}, \rho) \sin 2\theta - \delta_2 d_4 I'_0(\delta_2 \rho) + R_2(d_m, \rho) \sin 2\theta, \\ N_\rho^{(2)} = -D_2 [\Pi_3^{(2)}(c_m^{(2)}, \rho) \cos 2\theta + R_3(d_m, \rho) \cos 2\theta], \\ M_\rho^{(2)} = -D_2 [-c_1^{(2)} (1 - \nu_2) \rho^{-2} + \Pi_4^{(2)}(c_m^{(2)}, \rho) \cos 2\theta + 2d_1 (1 + \nu_2) + \\ + R_4(d_m, \rho) \cos 2\theta], \quad (7) \\ H_{\rho\theta}^{(2)} = -D_2 (1 - \nu_2) \left[-\frac{1}{2} c_4^{(2)} \rho^{-2} Q_1^{(2)}(\delta_2 \rho) + \Pi_5^{(2)}(c_m^{(2)}, \rho) \sin 2\theta - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} d_4 \rho^{-2} Q_2(\delta_2 \rho) + R_5(d_m, \rho) \sin 2\theta \right] \quad (m = 2, 3, 5). \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(j)}(c_m^{(j)}, \rho) &= 2\rho^{-1} [c_2^{(j)} \rho^{-2} - 4\varepsilon_j c_3^{(j)} \rho^{-2} + c_5^{(j)} K_2(\delta_j \rho)], \\ \Pi_2^{(j)}(c_m^{(j)}, \rho) &= 2c_2^{(j)} \rho^{-3} + 2c_3^{(j)} \rho^{-1} (1 - 4\varepsilon_j \rho^{-2}) - \delta_j c_5^{(j)} K'_2(\delta_j \rho), \\ \Pi_3^{(j)}(c_m^{(j)}, \rho) &= 2\rho^{-1} [4c_3^{(j)} \rho^{-2} - \varepsilon_j^{-1} c_5^{(j)} K_2(\delta_j \rho)], \\ \Pi_4^{(j)}(c_m^{(j)}, \rho) &= 2\rho^{-2} \{3(1 - \nu_j) c_2^{(j)} \rho^{-2} - 2c_3^{(j)} [6(1 - \nu_j) \varepsilon_j \rho^{-2} + \nu_j] - \\ &\quad - (1 - \nu_j) c_5^{(j)} Q_3^{(j)}(\delta_j \rho)\}, \\ \Pi_5^{(j)}(c_m^{(j)}, \rho) &= 2\rho^{-2} \left[3c_2^{(j)} \rho^{-2} + c_3^{(j)} (1 - 12\varepsilon_j \rho^{-2}) - \frac{1}{4} c_5^{(j)} Q_5^{(j)}(\delta_j \rho) \right], \\ R_1(d_m, \rho) &= -2\rho [d_2 + 2d_3 \rho^{-2} (1 + 6\varepsilon_2 \rho^{-2}) - \rho^{-2} d_5 I_2(\delta_2 \rho)], \\ R_2(d_m, \rho) &= 2\rho (d_2 + d_3 \rho^2) + 24\varepsilon_2 \rho d_3 - \delta_2 d_5 I'_2(\delta_2 \rho), \\ R_3(d_m, \rho) &= -2 [\varepsilon_2^{-1} \rho^{-1} d_5 I_2(\delta_2 \rho) - 12\rho d_3], \end{aligned}$$

$$R_4(d_m^-, \rho) = 2 \{d_2(1 - \nu_2) + 6[\rho^2 + 2\varepsilon_2(1 - \nu_2)]d_3 - d_5(1 - \nu_2)\rho^{-2}Q_4(\delta_2\rho)\},$$

$$R_5(d_m, \rho) = -\left[\frac{1}{2}d_5\rho^{-2}Q_6(\delta_2\rho) + 2d_2 + 6\rho^{-2}d_3(1 + 4\varepsilon_2\rho^{-2})\right],$$

$$Q_1^{(j)}(\delta_j\rho) = (\delta_j\rho)^2 K_0''(\delta_j\rho) - \delta_j\rho K_0'(\delta_j\rho),$$

$$Q_2(\delta_2\rho) = (\delta_2\rho)^2 I_0'(\delta_2\rho) - \delta_2\rho I_0(\delta_2\rho),$$

$$Q_3^{(j)}(\delta_j\rho) = \delta_j\rho K_2'(\delta_j\rho) - K_2(\delta_j\rho), \quad Q_4(\delta_2\rho) = \delta_2\rho I_2'(\delta_2\rho) - I_2(\delta_2\rho),$$

$$Q_5^{(j)}(\delta_j\rho) = -(\delta_j\rho)^2 K_2''(\delta_j\rho) + \delta_j\rho K_2'(\delta_j\rho) - 4K_2(\delta_j\rho),$$

$$Q_6(\delta_2\rho) = -(\delta_2\rho)^2 I_2''(\delta_2\rho) + \delta_2\rho I_2'(\delta_2\rho) - 4I_2(\delta_2\rho),$$

$$\varepsilon_j = \frac{h_j^2}{3k'(1 - \nu_j^2)} \frac{E_j}{G_j}; \quad D_j = \frac{2E_j h_j^3}{3(1 - \nu_j^2)} - \text{цилиндрическая жесткость.}$$

Из граничных условий (4), (5) с использованием выражений (2), (3), (6) и (7) получаем систему 15 алгебраических уравнений для определения 15 неизвестных постоянных. Решение этой системы в явном виде весьма громоздко. В общем случае неизвестные постоянные, как и определяемые по ним усилия и моменты, являются сложными функциями упругих постоянных материала плиты и кольца, размеров кольца, а также отношения радиуса отверстия к толщине плиты.

Представляет интерес исследование зависимости внутренних силовых факторов от параметров $\lambda = \frac{D_2}{D_1}$, характеризующего относительную жесткость кольца, и $\frac{E_j}{G_j}$, характеризующего податливость материала пластинки и кольца на сдвиг.

Случаи $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$ соответствуют свободной круговой полости и полости с впаянным абсолютно жестким ядром [1]. При $\lambda = 1$, $\nu_1 = \nu_2$, $G_1' = G_2'$ получаем случай изгиба плиты со свободным отверстием радиуса b .

Предельный переход $\frac{E_j}{G_j} \rightarrow 0$ соответствует классической теории. В этом случае из полученных результатов следует ряд зависимостей теории Кирхгофа. Исключение составляют перерезывающие усилия N_θ , действующие на контуре сая, а значит, и касательные срезающие напряжения $\tau_{\theta z}$. Они меняются от нуля (в случае абсолютно жесткого включения) до величин порядка h^{-2} , т. е. порядка главных изгибных напряжений (в случае свободного отверстия). В обоих случаях классическая теория не указывает даже порядок рассматриваемых величин.

В качестве примера рассмотрим случай изгиба плиты с отверстием, подкрепленным кольцом, когда $\frac{a}{b} = 1,2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $h_1 = h_2$, $G_1' = G_2'$. Численный расчет проведен на ЭВМ «Минск-32».

На рис. 1 показано изменение в зависимости от величины λ изгибающих $M_\theta(a, \frac{\pi}{2})$ (кривые 1), $M_\rho(a, 0)$ (кривые 2) и крутящего $H_{\rho\theta}(a, -\frac{\pi}{4})$ (кривая 3) моментов, отнесенных к M , на контуре сая для отношений $\frac{a}{h_1} = 10$, $\frac{E_1}{G_1'} = 20$. Штриховыми линиями показано изменение моментов M_θ и M_ρ на контуре сая согласно классической теории.

На рис. 2 показано изменение перерезывающих усилий N_θ , отнесенных к $\frac{M}{h}$ (кривая 1), и N_ρ , отнесенных к $\frac{M}{a}$ (кривая 2), на контуре сая в зависимости от величины λ для отношений $\frac{a}{h_1} = 10$, $\frac{E_1}{G_1'} = 20$.

При решении данной задачи в рамках классической теории Кирхгофа [2] оптимальное подкрепляющее кольцо при заданной его ширине выбиралось так, чтобы моменты M_θ и M_ρ на контуре спая были сбалансированы (на рис. 1 — точка пересечения штриховых линий).

Для трансверсально изотропных пластинок такой критерий оптимальности подкрепляющего кольца, вообще говоря, неприемлем. Оптимальное кольцо в этом случае должно выбираться из расчета на прочность системы пластинка — подкрепляющее кольцо по критериям прочности для анизо-

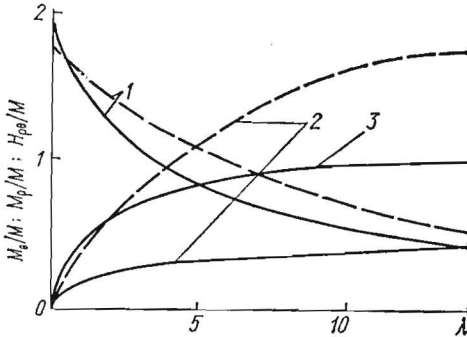


Рис. 1.

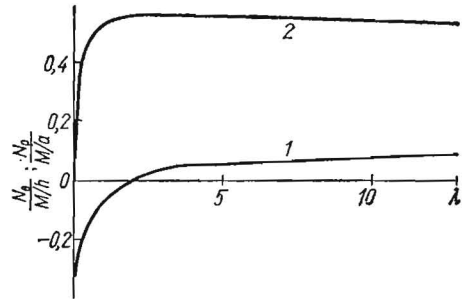


Рис. 2.

тропных материалов. Немаловажное значение будут иметь касательные срезающие напряжения, пренебрежительно малые в случае решения данной задачи согласно классической теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. «Наукова думка», К., 1973.
2. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР, Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СРЕДЫ С ЗАДАНЫМ ПОЛЕМ ТЕНЗОРА ДИСТОРСИЙ

В. К. Ганулич

Строится решение уравнений теории упругости для однородной изотропной среды с имеющимся в ней произвольной плотности полем тензора остаточных несовместных деформаций (дисторсий), порожденного упругими и неупругими процессами деформирования материала среды. Для одного распределения дисторсий получены в замкнутом виде формулы, из которых вытекают решения для некоторых других случаев распределения поля дисторсий (для более тридцати распределений).

1. Пусть $\epsilon_{ij}^0(x_k)$ — известные компоненты тензора дисторсий, а $\epsilon_{ij}^*(x_k)$ — компоненты тензора силовой деформации, которые связаны с компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ законом Гука так, что компоненты тензора полной деформации

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \epsilon_{ij}^* \quad (1)$$

Как известно [6], связь между ϵ_{ij} и σ_{ij} представляется в этом случае зависимостями

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{\alpha\alpha} \delta_{ij} - e_{ij}^0 \right), \quad (2)$$