

из условия того, что функция прогибов  $w_0$  в области  $x < x_1$  определяется выражением (17).

Температурные напряжения определяются через функцию  $w_0$  по формулам (13), (14).

На рис. 3 приведены графики экстремального температурного поля (18) и соответствующих ему температурных напряжений (сплошные линии) для  $\nu = 0,3$ ;  $\frac{R}{h} = 40$ ;  $m_1 = 0,8$  при ширине зоны нагрева оболочки  $|z| \leq 0,3R$ . На этом же рисунке для сравнения штриховыми линиями нанесены графики экстремального температурного поля (12) и соответствующих ему температурных напряжений.

На рис. 4 приведены графики зависимости параметра  $x_1$ , характеризующего ширину зоны ограничения растягивающих осевых напряжений, от коэффициента  $m_1$  для  $\frac{R}{h} = 20$  (сплошная линия) и  $\frac{R}{h} = 40$  (штриховая) при ширине зоны нагрева оболочки  $|z| \leq 0,3R$ .

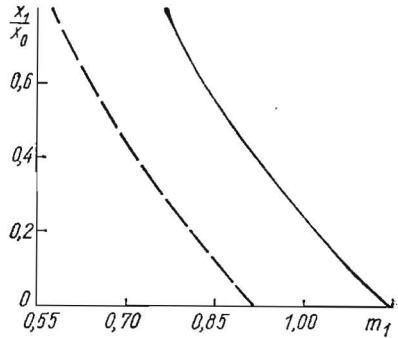


Рис. 4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, М., 1961.
2. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.— ПМТФ, 1968, 4.
3. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1973 г.

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ В ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КОЛЬЦЕВЫМ СВАРНЫМ ШВОМ

Л. П. Беседина, Н. Н. Тимошенко

Одним из методов снятия остаточных сварочных напряжений является метод создания дополнительных пластических деформаций, которые вместе с начальными остаточными сварочными обеспечивают оптимальное понижение уровня суммарных напряжений.

В данной работе с использованием методов вариационного исчисления определены такие оптимальные осесимметричные пластические деформации в пологой сферической оболочке с кольцевым сварным швом.

Рассмотрим пологую сферическую оболочку с круговым отверстием радиуса  $r_0$  в полярной системе координат  $\rho = \frac{r}{r_0}$  и  $\theta$ . Вблизи отверстия расположен кольцевой сварной шов, в окрестности  $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$  которого имеются постоянные по толщине осесимметричные начальные остаточные деформации:

$$e_r^{(0)} = \varphi_0(\rho), \quad e_\theta^{(0)} = \psi_0(\rho). \quad (1)$$

Найдем оптимальные пластические деформации  $e_r^{(p)}$ ,  $e_\theta^{(p)}$ , которые вместе с начальными остаточными  $e_r^{(0)}$ ,  $e_\theta^{(0)}$  вызывают в оболочке оптимально низкий уровень напряжений. Для этого рассмотрим энергию упругой деформации оболочки [1, 2], которая является интегральной мерой ее напря-

женного состояния и представляется в виде следующего функционала, заданного на множестве функций напряжений  $\varphi(\rho)$  и прогибов  $w(\rho)$ :

$$K[\varphi, w] = \frac{\pi D_1}{r_0^2} \int_1^{\rho} \left\{ q \left[ \rho_* \left( \frac{d^2 \varphi}{d\rho_*^2} \right)^2 - 2\nu \frac{d\varphi}{d\rho_*} \frac{d^2 \varphi}{d\rho_*^2} + \frac{1}{\rho_*} \left( \frac{d\varphi}{d\rho_*} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \rho_* \left( \frac{d^2 w}{d\rho_*^2} \right)^2 + 2\nu \frac{dw}{d\rho_*} \frac{d^2 w}{d\rho_*^2} + \frac{1}{\rho_*} \left( \frac{dw}{d\rho_*} \right)^2 \right\} d\rho_*, \quad (2)$$

которые связаны между собой системой разрешающих уравнений [3]

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{q}{R} \nabla^2 \varphi = 0,$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi - \frac{1}{R} \nabla^2 w + \rho \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{d}{d\rho} (\rho e_{\theta c}^{(0)}) - e_{rc}^{(0)} \right] = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right)$  — обобщенный оператор Лапласа;  $e_{rc}^{(0)} = e_r^{(0)} + e_r^{(p)}$ ,  $e_{\theta c}^{(0)} = e_{\theta}^{(0)} + e_{\theta}^{(p)}$  — суммарные остаточные деформации;  $\varphi(\rho)$  — функция напряжений;  $w(\rho)$  — функция прогибов;  $q = \frac{D_0}{D_1}$ ;  $D_0 = 2Eh$  — жесткость на растяжение;  $D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$  — изгибная жесткость;  $E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $2h$  — толщина оболочки;  $R$  — радиус оболочки.

Ставится вариационная задача о нахождении экстремалей функционала (2) на множестве функций  $\varphi$ ,  $w$ ,  $e_r^{(p)}$ ,  $e_{\theta}^{(p)}$ , которые удовлетворяют разрешающим уравнениям (3) и следующему дополнительному условию на искомые пластические деформации:

$$\Phi(e_r^{(p)}, e_{\theta}^{(p)}) = 0. \quad (4)$$

В случае, когда условие (4) задается в виде

$$e_r^{(p)} - k e_{\theta}^{(p)} = 0,$$

уравнения Эйлера сформулированной задачи на условный экстремум [4] запишутся так:

$$\nabla^2 \nabla^2 \left( \varphi + \frac{\lambda_2}{q} \right) + \frac{1}{R} \nabla^2 \lambda_1 = 0, \\ \nabla^2 \nabla^2 (w + \lambda_1) - \frac{1}{R} \nabla^2 \lambda_2 = 0, \quad (5) \\ \rho \frac{d^2 \lambda_2}{d\rho^2} + k \frac{d\lambda_2}{d\rho} = 0,$$

а вариационное условие на граничные значения допустимых функций будет иметь вид

$$\left\{ - \left[ q \left( \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d^2}{d\rho^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) (\varphi + \lambda_2) + \frac{q}{R} \rho \frac{d\lambda_1}{d\rho} \right] \delta\varphi + \left[ q \left( \rho \frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \nu \frac{d\varphi}{d\rho} \right) + \frac{q}{R} \rho \lambda_1 + \rho \frac{d^2 \lambda_2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \lambda_2 \right] \delta\varphi' + \left( \lambda_2 - \rho \frac{d\lambda_2}{d\rho} \right) \delta\varphi'' - \\ - \left[ \left( \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d^2}{d\rho^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) (w + \lambda_1) - \frac{1}{R} \rho \frac{d\lambda_2}{d\rho} \right] \delta w + \left( \rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \nu \frac{dw}{d\rho} + \right. \\ \left. + \rho \frac{d^2 \lambda_1}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \lambda_1 - \frac{1}{R} \rho \lambda_2 \right) \delta w' + \left( \lambda_1 - \rho \frac{d\lambda_1}{d\rho} \right) \delta w'' + \rho \lambda_1 \delta w''' + \left[ (1-k) \lambda_2 - \right. \\ \left. - \rho \frac{d\lambda_2}{d\rho} \right] \delta e_{\theta}^{(p)} + \rho \lambda_2 \delta (e_{\theta}^{(p)})' \Big|_{\rho=r_0}^{\rho \rightarrow \infty} = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda_1(\rho)$ ,  $\lambda_2(\rho)$  — множители Лагранжа.

Из системы уравнений Эйлера (5) с учетом разрешающих уравнений (3) получаем следующее уравнение для определения функции  $e_{\theta}^{(p)}(\rho)$ :

$$\rho \frac{d^2 e_{\theta}^{(p)}}{d\rho^2} + (2-k) \frac{de_{\theta}^{(p)}}{d\rho} = -\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{d}{d\rho} (\rho e_{\theta}^{(0)}) - e_r^{(0)} \right] + C_1 \rho + C_2 \rho^{-(k+2)} + C_3 \rho^{-k+2} + C_4 \rho \ln \rho, \quad (7)$$

$C_1, C_2, C_3, C_4$  — постоянные интегрирования.

Удовлетворяя вариационному соотношению (6), получаем, что константы  $C_1, C_2, C_3, C_4$  равны нулю. С учетом этого решение уравнения (7) запишется в виде

$$e_{\theta}^{(p)} = \rho^{k-1} \left\{ D_1 + \int_1^{\rho} \rho_*^{-k} [f(\rho_*) + D_2] d\rho_* \right\}, \quad (8)$$

где

$$f(\rho) = - \left[ \frac{d}{d\rho} (\rho e_{\theta}^{(0)}) - e_r^{(0)} \right],$$

$D_1, D_2$  — постоянные интегрирования. Тогда

$$e_r^{(p)} = k e_{\theta}^{(p)} = k \rho^{k-1} \left\{ D_1 + \int_1^{\rho} \rho_*^{-k} [f(\rho_*) + D_2] d\rho_* \right\}. \quad (9)$$

Найденные экстремальные пластические деформации  $e_r^{(p)}, e_{\theta}^{(p)}$  зависят от параметров  $D_1, D_2, k$ . Выделим из этих деформаций такие, которые при заданных начальных остаточных деформациях не вызывают напряжений в оболочке.

Известно [6], что для того чтобы остаточные деформации не вызывали напряжений в свободной оболочке, они должны быть совместными, а соответствующие им перемещения — однозначными. Удовлетворив уравнению совместности [3]

$$\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{d}{d\rho} (\rho e_{\theta c}^{(0)}) - e_{rc}^{(0)} \right] = 0, \quad (10)$$

получим  $D_2 = 0$ . При этом, как видно из уравнений (3), (10), усилия  $N_1, N_2$ , моменты  $M_1, M_2$  [3] тождественно равны нулю. Значит, суммарные остаточные деформации

$$e_{rc}^{(0)} = e_r^{(0)} + e_r^{(p)}, \quad e_{\theta c}^{(0)} = e_{\theta}^{(0)} + e_{\theta}^{(p)},$$

где

$$e_{\theta}^{(p)} = \rho^{k-1} \left[ D_1 + \int_1^{\rho} \rho_*^{-k} f(\rho_*) d\rho_* \right], \quad e_r^{(p)} = k e_{\theta}^{(p)}, \quad (11)$$

не вызывают напряжений в свободной на контуре полой сферической оболочке. Задавая различные значения параметров  $D_1$  и  $k$ , получаем множество таких пластических деформаций, которые вместе с начальными остаточными приводят к полному снятию начальных остаточных напряжений.

Ограничимся рассмотрением таких пластических деформаций, для которых

$$1) \quad e_{\theta}^{(p)}(\rho_2) = 0, \quad e_{\theta}^{(p)}(\infty) = 0. \quad (12)$$

Из соотношений (11) с учетом (12) получим

$$D_1 = - \int_1^{\rho_2} \rho_*^{-k} f(\rho_*) d\rho_*, \quad -\infty < k < \infty. \quad (13)$$

Отметим, что в данном случае пластические деформации расположены в области  $1 \leq \rho \leq \rho_2$  оболочки и равны нулю вне ее.

$$2) \quad e_{\theta}^{(p)}(\rho_1) = 0, \quad e_{\theta}^{(p)}(\infty) = 0. \quad (14)$$

В этом случае из формулы (11) с учетом (14) получим

$$D_1 = 0, \quad k < 1. \quad (15)$$

Соответствующие пластические деформации расположены в области  $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ , а в области  $1 \leq \rho \leq \rho_1$  равны нулю.

Численные расчеты выполнены для начальных остаточных деформаций (1), которые согласно экспериментальным данным, приведенным в работе

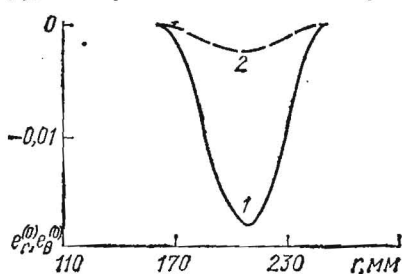


Рис. 1.

[5], аппроксимировались функциями  $\varphi_0 = A(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2$ ,  $\psi_0 = B(\rho - \rho_1)^2 \times (\rho - \rho_2)^2$  при  $\rho_1 = 1,5$ ;  $\rho_2 = \frac{25}{11}$ ;  $A = -0,807769636$ ;  $B = -0,104710864$ .

Графики изменения начальных остаточных деформаций (1) в зависимости от координаты  $\rho$  приведены на рис. 1. Из приведенных графиков видно, что радиальные  $e_r^{(0)}$  (кривая 1) и кольцевые  $e_\theta^{(0)}$  (кривая 2) остаточные деформации отрицательного знака, причем значения  $e_r^{(0)}$

значительно больше значений  $e_\theta^{(0)}$  по абсолютной величине.

На рис. 2, 3 сплошными линиями изображены графики радиальных  $e_r^{(p)}$ , пунктирными — кольцевых  $e_\theta^{(p)}$  пластических деформаций для различ-

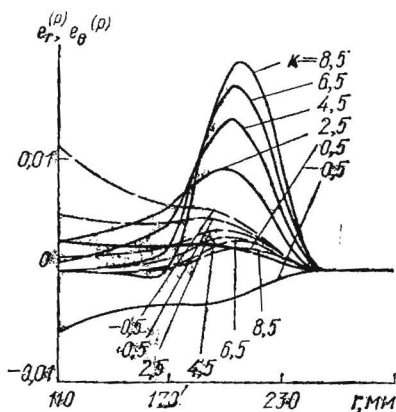


Рис. 2.

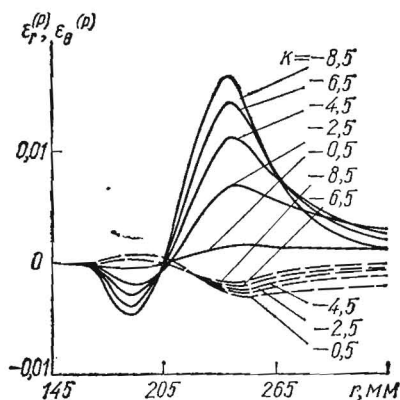


Рис. 3.

ных значений параметра  $k$ . Из графиков видно, что в первом случае с возрастанием параметра  $k$  пластические деформации  $e_r^{(p)}$ ,  $e_\theta^{(p)}$  локализуются в зоне распределения начальных остаточных деформаций (зона сварного шва). Причем при  $k = 8,5$  пластические деформации близки по величине и обратны по знаку к начальным остаточным деформациям, т. е. наблюдается практически полное снятие остаточных деформаций ( $e_r^{(0)} \approx 0$ ,  $e_\theta^{(0)} \approx 0$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И. — В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 9. «Наукова думка», К., 1970.
2. Бурак Я. И., Григолюк Э. И., Подстригач Я. С. — В кн.: Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. «Наука», М., 1970.
3. Власов В. З. Избранные труды. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1962.
4. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, М., 1961.
5. Недосека А. Я., Казимиров А. А., Пархоменко И. В. — Автоматическая сварка, 1972, 8.
6. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.