

подкрепляющего стержня Н-образного поперечного сечения $g_0^* = 0,0280g_0$, $G^* = 0,3489g_0$. Кроме того, принято, что площадь F_m поперечного сечения теплоотводящего элемента равна площади F_0 поперечного сечения Н-образного подкрепляющего элемента. Тогда, если $\frac{\lambda_m}{\lambda_0} = 9$, то $\varepsilon = 9$ и $\varepsilon = 5$ для Н-образного и прямоугольного поперечных сечений подкрепляющего стержня соответственно. При Н-образном поперечном сечении подкрепляющего стержня напряжение σ_y (рис. 4, кривая 1) в пластинке на стыке ее с подкреплением уменьшается в 1,7 раза по сравнению с напряжением в пластинке с прямоугольным поперечным сечением (рис. 4, кривая 2) подкрепляющего стержня.

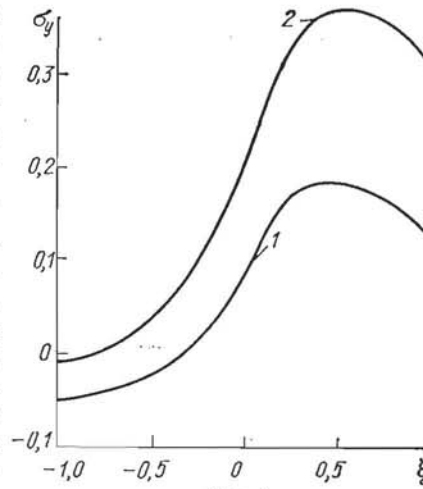


Рис. 4.

Как следует из формул (12) — (14), наличие теплоотводящего элемента приводит к уменьшению температурных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коляно Ю. М., Кулик А. Н.— Доклады и научные сообщения Львовского политехн. ин-та, 1974, 2, 52.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, М., 1962, 186.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР,
Всесоюзный научно-исследовательский институт
электроннолучевых приборов,
Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию
в январе 1974 г.

О ВЛИЯНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ

О. В. Караванский

Рассмотрим бесконечную тонкую пластинку, симметрично подкрепленную относительно ее срединной плоскости системой тонких прямых ребер жесткости прямоугольного поперечного сечения с интервалом между ребрами $2l$. Предполагаем, что ребра изготовлены из одного материала и размеры их одинаковы. С боковых поверхностей системы пластинка—ребра осуществляется теплообмен по закону Ньютона со средой температуры t_c , изменяющейся во времени и вдоль ребер.

Задачу теплопроводности для такой системы, учитывая ее периодичность, если ребро жесткости рассматривать как тонкий стержень, в соответствии с [2], можно свести к определению усредненной по толщине температуры T для повторяющегося элемента пластинки, заключенного между двумя ребрами жесткости, из уравнения

$$\Delta T - \varepsilon T = \varepsilon t_c + \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (-1 < \xi < 1) \quad (1)$$

при таких краевых условиях:

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - \varepsilon_p T + \varepsilon_p t_c \pm \frac{\partial T}{\partial \xi} - k \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \xi = \mp 1; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } |\eta| = \infty; \quad T = 0 \quad \text{при } \tau = 0,$$

где

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \eta = \frac{y}{l}; \quad \tau = \frac{\lambda \tau_1}{c l^2}; \quad \varepsilon = \frac{\alpha l^2}{\delta \lambda}; \quad \varepsilon_p = \frac{\alpha_p (\delta_p + h) l}{\delta \lambda r};$$

$$\kappa = \frac{\lambda_p \delta_p h}{\lambda l \delta r}; \quad k = \frac{c_p \delta_p h}{r \delta l c}; \quad r = \frac{\lambda_p}{\lambda_p + \alpha_p h}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2};$$

τ_1 — время; α — коэффициент теплообмена; λ и c — коэффициенты теплопроводности и теплоемкости; h — высота ребра жесткости; индексом « p » отмечены величины, относящиеся к ребру жесткости. При этом усредненная температурная характеристика ребра ϑ_p выражается через значение температуры пластинки в основании ребра $T(\eta, 1)$ следующим образом:

$$\vartheta_p = \frac{1}{2\delta_p h} \int_0^h \int_{-\delta_p}^{\delta_p} t_p dz dx \approx (1 - m) T(\eta, 1) + m t_c, \quad (3)$$

где

$$m = \alpha_p h [2(h + \delta)(\lambda_p + \alpha_p h)]^{-1}.$$

Решая уравнения (1) — (2) с помощью метода интегральных преобразований, находим

$$T(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{t}_c [\varepsilon \gamma^{-2} + (q_c \beta^2 + q_{HS}) \gamma^{-2} L_1^{-1} \operatorname{ch} \gamma \xi] \times$$

$$\times \exp(-i\beta\eta + s\tau) ds d\beta, \quad (4)$$

где

$$L_1 = \gamma \operatorname{sh} \gamma + (\kappa \beta^2 + ks + \varepsilon_p) \operatorname{ch} \gamma; \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 + \varepsilon + s};$$

$$\tilde{t}_c = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_c(\eta, \tau) \exp(-s\tau + i\beta\eta) d\tau d\eta; \quad q_c = \varepsilon_p - \kappa\varepsilon; \quad q_{HS} = \varepsilon_p - k\varepsilon. \quad (5)$$

Задача термоупругости для данной системы сводится к определению функции напряжений φ из уравнения

$$\Delta \Delta \varphi = -\alpha_l l^2 E \Delta T \quad (6)$$

и удовлетворению следующих граничных условий:

$$\text{при } \xi = \pm 1 \quad u_\xi = 0; \quad e_p = e_{\eta\eta}; \quad \text{при } \eta = \pm \infty \quad \sigma_{\eta\eta} = \sigma_{\eta\xi} = 0. \quad (7)$$

Здесь u_ξ — компонента перемещения пластинки; e_p — деформация оси ребра; e_{ij} , σ_{ij} ($i, j = \eta, \xi$) — компоненты деформаций и напряжений в пластинке; α_l , E — коэффициент линейного расширения и модуль Юнга материала пластинки.

Из уравнения (6) для функции φ с учетом ее четности по ξ получим выражение

$$\varphi = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [A \xi \operatorname{sh} \beta \xi + B \operatorname{ch} \beta \xi + \alpha_l E \varepsilon \tilde{t}_c \beta^{-2} \gamma^{-2} -$$

$$- \alpha_l E \tilde{t}_c (\varepsilon + s)^{-1} (q_c \beta^2 + q_{HS}) \gamma^{-2} L_1^{-1} \operatorname{ch} \gamma \xi] \exp(-i\beta\eta + s\tau) ds d\beta. \quad (8)$$

При определении усилия в ребре жесткости N будем исходить из условия самоуравновешенности температурных напряжений в каждом поперечном сечении системы $\eta = \text{const}$. В результате найдем

$$N = -2\delta l \int_{-1}^1 \sigma_{\eta\eta} d\xi = -\frac{2\delta}{4\pi^2 l i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [2(A + B\beta) \operatorname{sh} \beta + 2A\beta \operatorname{sh} \beta -$$

$$- 2\alpha_l E \tilde{t}_c (\varepsilon + s)^{-1} (q_c \beta^2 + q_{HS}) \gamma^{-1} L_1^{-1} \operatorname{sh} \gamma] \exp(-i\beta\eta + s\tau) ds d\beta. \quad (9)$$

Граничные условия (7) при $\xi = 1$, записанные через функцию напряжений, усилие в ребре жесткости и температуру, после применения к ним преобразования Фурье и Лапласа по переменным η и τ примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi^2} + \nu \beta^2 \tilde{\varphi} \right) - \frac{\tilde{N}}{E_p F_p} &= \alpha_t^p \tilde{\vartheta}_p - \alpha_t \tilde{T}; \\ - \frac{\nu}{EI} \cdot \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} - \frac{1}{EI} \int \beta^2 \tilde{\varphi} d\xi + \alpha_t l \int \tilde{T} d\xi &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где ν — коэффициент Пуассона материала пластинки.

Удовлетворяя граничным условиям (10), для A и B получим такие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{A}{EI^2} &= \frac{\tilde{t}_c \operatorname{sh} \beta}{(3-\nu) \beta^2 L_2} \left\{ \varepsilon [\alpha_t^p - (1+\nu) \alpha_t] \gamma^{-2} + \frac{\alpha_t^p m}{1-m} + \alpha_t (q_c \beta^2 + q_{HS}) \times \right. \\ &\times L_1^{-1} \left\{ (1+\nu) \beta^2 \gamma^{-2} (\varepsilon + s)^{-1} \operatorname{ch} \gamma + \frac{\alpha_t^p}{\alpha_t} \gamma^{-2} \operatorname{ch} \gamma - (1+\nu) \beta \times \right. \\ &\left. \left. \times (\varepsilon + s)^{-1} \gamma^{-1} \operatorname{cth} \beta \operatorname{sh} \gamma \right\} \right\}; \\ \frac{B}{I^2 E} &= \frac{1}{(1+\nu) \beta \operatorname{sh} \beta} \left\{ \frac{A}{I^2 E} [(1-\nu) \operatorname{sh} \beta - (1+\nu) \beta \operatorname{ch} \beta] + \right. \\ &\left. + \frac{1+\nu}{\varepsilon + s} L_1^{-1} (q_c \beta^2 + q_{HS}) \alpha_t \tilde{t}_c \operatorname{sh} \gamma \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\omega = \frac{16\delta l E}{F_p E_p (1+\nu)}; \quad L_2 = \frac{\operatorname{sh} 2\beta}{2\beta} - \frac{1+\nu}{3-\nu} + \omega \frac{\operatorname{ch} 2\beta - 1}{4\beta^2}; \quad (12)$$

F_p — площадь поперечного сечения ребра; E_p — модуль Юнга материала ребра.

Окончательное выражение для функции напряжений находится подстановкой выражений для A и B (11) в формулу (8). Компоненты напряжений определяются через функцию напряжений φ по известным формулам [1].

Пример 1. Пусть температура среды, омывающей орребренную пластинку, в начальный момент времени изменяется на некоторую величину t_0 и далее остается постоянной, т. е.

$$t_c = t_0 S_+(\tau), \quad (13)$$

где $S_+(\tau)$ — функция Хевисайда.

Выражение для \tilde{t}_c (5) с учетом (13) подставим в формулы (4), (8) и (11) и определим компоненты напряжений, исходя из выражения для функции напряжений. После вычисления интегралов выражения для температурного поля, компонент напряжений в пластинке и усилия в ребре жесткости примут вид: при $q_H \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{T}{t_0} &= 1 - q_H \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \mu_n \xi \exp [-(\mu_n^2 + \varepsilon) \tau]; \\ \frac{\sigma_{yy}}{\alpha_t E t_0} &= \frac{a-1-\nu}{\omega_1} - q_H \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(1-m)a}{\omega_1} \cos \mu_n - \frac{1+\nu-\omega_1}{\omega_1} \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \right. \\ &\left. - \cos \mu_n \xi \right] B_n e^{-(\mu_n^2 + \varepsilon) \tau}; \\ \frac{\sigma_{xx}}{\alpha_t E t_0} &= \frac{\nu(a-1-\nu)}{\omega_1} - 1 - \frac{\nu q_H}{\omega_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[a(1-m) \cos \mu_n - \right. \end{aligned} \quad (14)$$

$$-\left(1 + \nu + \frac{\omega_1}{\nu}\right) \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \Big] B_n e^{-\mu_n + \varepsilon} \tau; \quad (15)$$

$$\tau_{xy} = 0;$$

$$\frac{N}{\alpha_t E t_0} = -\frac{4\delta l}{\omega_1} \left\{ a - 1 - \nu - q_H \sum_{n=0}^{\infty} \left[a(1-m) \cos \mu_n - \right. \right.$$

$$\left. \left. - (1 + \nu) \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \right] B_n e^{-(\mu_n^2 + \varepsilon) \tau} \right\};$$

при $q_H = 0$

$$T = t_0 (1 - e^{-\varepsilon \tau}); \quad \frac{\sigma_{yy}}{\alpha_t E t_0} = \frac{1}{\omega_1} \{ [a(1-m) - 1 - \nu] (1 - e^{-\varepsilon \tau}) + ma \}; \quad (16)$$

$$\frac{\sigma_{xx}}{E \alpha_t t_0} = \frac{\nu \sigma_{yy}}{\alpha_t E t_0} - \frac{T}{t_0}; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \frac{N}{\alpha_t E t_0} = -\frac{4\delta l \sigma_{yy}}{\alpha_t E t_0}.$$

Здесь $\omega_1 = (1 + \nu) \left[1 - \nu + \frac{1}{4} \omega (3 - \nu) \right]; \quad a = \alpha_t^2 / \alpha_t;$

μ_n — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = -k\mu + q_H \mu^{-1}, \quad (17)$$

а

$$B_n = 4 \cos \mu_n (2\mu_n + 4\mu_n k \cos^2 \mu_n + \sin 2\mu_n)^{-1} \mu_n^{-1}. \quad (18)$$

Уравнение (17) при $q_H > 0$ имеет только действительные корни, а при $q_H < 0$ кроме действительных корней уравнение имеет один мнимый корень $i\mu_0$, удовлетворяющий неравенству

$$0 < \varepsilon - \mu_0^2 < \left| \varepsilon - \frac{\varepsilon p}{k} \right|.$$

По знаку и величине параметра q_H можно судить о характере возмущения температурного поля, обусловленного наличием подкрепления. Так, при $q_H < 0$ ребра жесткости нагреваются извне слабее, чем пластинка, и

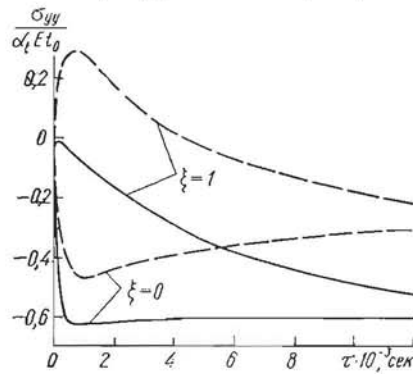


Рис. 1.

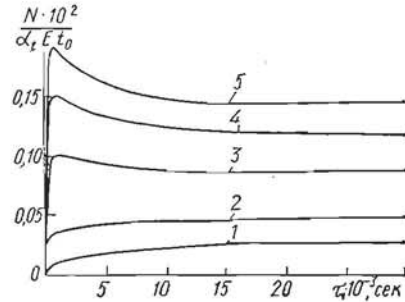


Рис. 2.

играют роль стоков тепла; при $q_H > 0$ ребра жесткости нагреваются более интенсивно, чем пластинка, и играют роль источников тепла.

На рис. 1 приведены графики изменения напряжений σ_{yy} во времени при $\alpha_p = 0$ для двух наиболее характерных точек поперечного сечения элемента пластинки $\xi = 0$ (середина элемента пластинки) и $\xi = 1$ (линия соединения с ребром жесткости). Сплошные линии соответствуют $l = 0,2$ м, штриховые — $l = 1$ м.

На рис. 2 приведены графики изменения осевых усилий в ребрах жесткости во времени при $\alpha_p = 0$. Кривые 1—5 получены для $l = 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2$ м соответственно.

Из анализа графиков можно сделать вывод, что при малых расстояниях между ребрами жесткости максимальные нормальные напряжения в пластинке и усилия в ребре жесткости достигаются при установившемся тепловом режиме, тогда как при более редком размещении ребер они имеют место на начальной стадии нагрева системы.

Расчеты проводились для дюралюминиевой пластинки и стальных ребер жесткости при таких значениях теплофизических и геометрических характеристик конструкции: $\alpha = 30 \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{град}^{-1}$; $\nu = 0,25$; $h = 4 \times 10^{-2} \text{ м}$; $\delta_p = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $\delta = 0,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

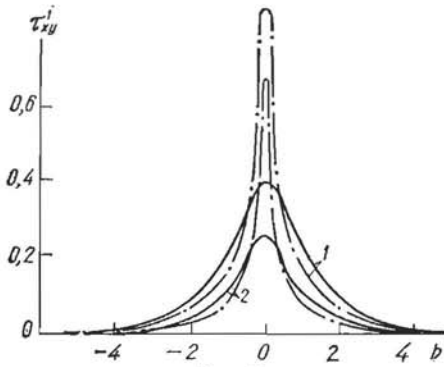


Рис. 3.

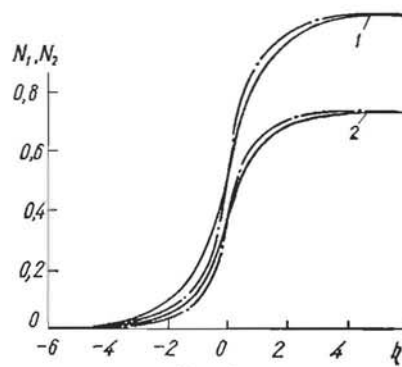


Рис. 4.

Пример 2. Рассмотрим стационарный случай, когда температура среды постоянна во времени, а вдоль ребер жесткости изменяется скачкообразно, т. е.

$$t_c = t_0 S(\eta). \quad (19)$$

Стационарное температурное поле в пластинке найдем, исходя из общего решения задачи (4). Подставляя вместо \tilde{t}_c его значение

$$\tilde{t}_c = \frac{t_0}{s} \left[\frac{i}{\beta} + \pi \delta(\beta) \right] \quad (20)$$

и применяя для стационарного случая асимптотическое свойство преобразования Лапласа

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{f}(s), \quad (21)$$

после интегрирования с использованием теории вычетов получим

$$T(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{t_0}{2} [1 + \operatorname{sgn} \eta (1 - e^{-|\eta| \sqrt{\varepsilon}})], & (q_c = 0) \\ \frac{t_0}{2} (1 + \operatorname{sgn} \eta) + q_c t_0 \operatorname{sgn} \eta \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \mu_n \xi \exp(-\sqrt{\mu_n^2 + \varepsilon} |\eta|), & (q_c \neq 0), \end{cases} \quad (22)$$

где

$$-1 < \xi < 1; \quad B_n = [1 + (q_c - \chi \mu_n^2) \mu_n \sin \mu_n + \mu_n^2 (1 + 2\chi) \cos \mu_n]^{-1}; \quad (23)$$

$q_c = \varepsilon_p - \chi \varepsilon$; μ_n — корни уравнения (17) с заменой в нем k на χ . Аналогично можно найти выражения для компонент напряжений и усилия в ребрах жесткости, исходя из выражения для функции напряжений φ (8) с учетом значений коэффициентов A и B (11), которые из-за громоздкости выражений здесь не приводим.

На рис. 3 приведены графики изменения касательных напряжений $\tau_{xy}^1 = \tau_{xy} / \alpha_t E t_0$ в пластинке по линиях контакта с ребрами жесткости для значений $\omega = 0$ (кривые 1) и $\omega = 1$ (кривые 2) при $l = 0,2 \text{ м}$ (сплошные) и $l = 2 \text{ м}$ (штрихпунктирные линии).

На рис. 4 приведены графики изменения усилий вдоль ребер жесткости $N_1 = N/\alpha_t Et_0$ при $l = 0,2$ м (сплошные линии) и $N_2 = N \cdot 10^{-1}/\alpha_t Et_0$ при $l = 2$ м (штрихпунктирные линии) при $\omega = 0$ (кривые 1) и $\omega = 0,5$ (кривые 2).

Следует отметить, что основным параметром, характеризующим влияние ребер жесткости на стационарное температурное поле пластинки, является q_c , аналогично, как и q_H в нестационарной задаче теплопроводности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. «Мир», М., 1967.
2. Караванский О. В.— Прикладная механика, 1970, 6, 7.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1963.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ОПТИМИЗАЦИЯ СИЛОВОЙ НАГРУЗКИ ПРИ УЗКИХ ЗОНАХ ЛОКАЛЬНОГО НАГРЕВА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Ю. Д. Зозуляк

При локальной термообработке сварных цилиндрических оболочек с целью понижения уровня остаточных напряжений температурные напряжения в зоне высоких температур могут достигать значительной величины, особенно при узких зонах нагрева. Для обеспечения оптимальных условий отжига возникает необходимость понижения уровня напряжений при локальном нагреве за счет других факторов, в частности путем дополнительного нагружения конструкции силовой нагрузкой.

Ниже рассматривается решение такой задачи для длинной цилиндрической оболочки радиуса R , находящейся под воздействием заданного осесимметричного постоянного по толщине температурного поля $T(\xi)$, локализованного в области $|\xi| \leq \eta$, и некоторой осесимметричной нормальной силовой нагрузки q_n , приложенной вне зоны нагрева $|\xi| \geq \eta_1$. Для случая силовой нагрузки, приложенной в области нагрева цилиндрической оболочки, такая задача рассмотрена в работе [2].

Сформулируем условия на функцию q_n , при которых обеспечивается требуемый уровень напряженного состояния в зоне высоких температур. При этом ограничимся рассмотрением задачи о выборе такой силовой нагрузки вне зоны нагрева, при которой осевые растягивающие напряжения на внешней поверхности оболочки не превышают заданных.

Будем предполагать, что температурное поле и силовая нагрузка симметричны относительно сечения $\xi = 0$, в котором температура достигает максимального значения.

Термоупругое состояние рассматриваемой оболочки определяется через температуру и функцию прогибов w , которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^4 w_0}{d\xi^4} + 4(w_0 - \alpha T) = \frac{4R}{D_0} q_n, \quad (1)$$

где

$$w_0 = \frac{w}{R}; \quad \xi = \frac{az}{R}; \quad a^4 = \frac{3(1-\nu^2)R^2}{4h^2}; \quad D_0 = 2Eh;$$

z — осевая координата; $2h$ — толщина оболочки; α — линейный коэффициент температурного расширения; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости.