

Численные расчеты распределения джоулева тепла проводились для цилиндрической оболочки с $\frac{h}{R} = \frac{1}{40}$ в зависимости от параметра $\delta_0 = \frac{\delta}{2h}$, характеризующего относительную глубину проникновения электрического поля, и параметра $nh = 2lk\pi h$ ($l = 1, 2, \dots$), характеризующего периодическое изменение электрического поля вдоль оси z . На рис. 2 представлены результаты численных расчетов $Q^* = Q/\lambda E_0^2$ при $\delta_0^{-1} = 0,1; 0,3; 0,5$ для точного решения (7), на рис. 3 — для приближенного решения задачи (кривые 1—8 на рис. 2 получены при $nh = 0; 0,039; 0,078; 0,157; 0,314; 0,471; 0,628; 0,785$, а кривые 1—4 на рис. 3 — при $nh = 0; 0,039; 0,078; 0,157$ соответственно).

Из результатов, приведенных на рис. 2, видно, что для параметра $0 \leq nh \leq 0,157$ распределение джоулева тепла по толщине оболочки близко к равномерному. Для $nh > 0,157$ существенно увеличивается градиентность распределения джоулева тепла по толщине оболочки.

Из сравнения результатов, приведенных на рис. 3, видно, что для параметра $nh \leq 0,078$ имеется удовлетворительное согласование распределения джоулева тепла, найденного на основании точного и приближенного решений.

Распределение осевых напряжений $5\sigma_{zz}$ по толщине оболочки представлено на рис. 4, 5. Вычисления проводились для значений времени $\tau = 1$ (рис. 4); 10 (рис. 5); ∞ ; $\delta_0^{-1} = 0,1; nh = 0; 0,039; 0,078$ (кривые 1—3). Сплошными линиями представлены результаты для $Vi = 0$, штрихпунктирными — для $Vi = 1$. Случай $\tau = \infty$ соответствует установившемуся режиму. Характер распределения осевых напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ по толщине оболочки аналогичен характеру распределения напряжений σ_{zz} . Из приведенных графиков видно, что в установившемся режиме уровни температурных напряжений выше уровней напряжений в начальный период нагрева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Чернявская Л. В. — В кн.: Теоретическая электротехника, 6. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1969.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
5. Подстригач Я. С. — В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 5. «Наукова думка», К., 1965.
6. Подстригач Я. С. — ИФЖ, 1963, 10.
7. Чернявская Л. В. — ФХММ, 1973, 3.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

О ВЛИЯНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВО ВРЕМЕНИ ИЗМЕНЕНИЯ ДЖОУЛЕВА ТЕПЛА И ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ НА ТЕМПЕРАТУРУ И НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛАХ

А. Р. Гачкевич

В данной работе предложена математическая постановка задачи определения температурных полей и напряжений в электропроводных упругих телах, находящихся в периодических во времени электромагнитных полях. В исходных соотношениях учитывается периодический характер изменения во времени джоулева тепла и пондеромоторных сил, а также связанность полей деформации и температуры.

1. Определение джоулева тепла. Задача определения джоулева тепла в электропроводном теле в пренебрежении механоэлектрическими, термоэлектрическими и поляризационными эффектами при постоянных характеристиках материала сводится к нахождению напряженности электрического поля для системы тело — вакуум из уравнений Максвелла и условий сопряжения электромагнитного поля на границе раздела тело — вакуум, а также условий на бесконечности. При этом напряженность электрического и магнитного полей представляется в виде

$$\vec{E}_* = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}, \quad \vec{H}_* = \vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (1)$$

для области электропроводного тела и

$$\vec{E}_{0*} = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i\omega t}, \quad \vec{H}_{0*} = \vec{H}_0(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (2)$$

для области вакуума. Здесь \vec{r} — радиус-вектор рассматриваемой точки, ω — частота, t — время.

Как известно [3], уравнения Максвелла могут быть приведены к одному уравнению второго порядка относительно функций \vec{E} или \vec{H} . Такие уравнения с учетом выражений (1), (2), записанные относительно функций напряженности электрического поля \vec{E} и \vec{E}_0 , будут

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{E} = 0;$$

$$\Delta \vec{E}_0 + k_0^2 \vec{E}_0 = i\mu_0 \omega \vec{j}^{(e)}, \quad \text{div } \vec{E}_0 = 0, \quad (3)$$

где $\vec{j}_* = \vec{j}^{(e)} e^{i\omega t}$ — внешние токи (токи в индукторе); $k^2 = \mu\omega(\epsilon\omega - i\sigma)$; $k_0^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2$. Здесь ϵ , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, σ — электропроводимость.

Если найдена напряженность электрического поля \vec{E} , то джоулево тепло, выделяемое в теле при протекании индукционных токов, находится по формуле

$$Q = \sigma [\text{Re } \vec{E}_*(\vec{r}, t)]^2 = \sigma \{\text{Re } [\vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}]\}^2. \quad (4)$$

Учитывая, что $\text{Re } \vec{E}_* = \frac{1}{2} (\vec{E}_* + \vec{E}_*^*)$, получим

$$(\text{Re } \vec{E}_*)^2 = \frac{1}{4} [\vec{E}_*^2 + \vec{E}_*^*{}^2 + 2\vec{E}_* \cdot \vec{E}_*^*]. \quad (5)$$

Здесь знаком \sim обозначены комплексно-сопряженные величины.

На основании соотношения (5) из формулы (4) найдем

$$Q = Q^{(1)} + Q^{(2)}, \quad (6)$$

где

$$Q^{(1)} = \frac{1}{2} \sigma \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}), \quad Q^{(2)} = \frac{1}{4} \sigma [\vec{E}^2(\vec{r}) e^{2i\omega t} + \vec{E}^*{}^2(\vec{r}) e^{-2i\omega t}].$$

Составляющая $Q^{(1)}$ представляет собой усредненное по периоду $\frac{2\pi}{\omega}$ джоу-

лево тепло, т. е. $Q^{(1)} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} Q dt$. Суммарная мощность периодической во времени составляющей $Q^{(2)}$ джоулева тепла за период колебания равна нулю.

2. **Определение температурного поля и напряжений.** Температурные поля и напряжения определяются из системы уравнений термоупругости [4]

$$\Delta T + \frac{Q}{\lambda} - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha(1+\nu)ET_0}{\lambda(1-2\nu)} \operatorname{div} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\vec{F}}{G} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{2\alpha(1+\nu)E}{1-2\nu} \operatorname{grad} T.$$

Здесь T — отклонение температуры от начальной; \vec{u} — вектор перемещений; $\vec{F} = \mu \vec{j} \times \vec{H}$ — пондеромоторная сила; T_0 — начальная температура в градусах Кельвина; λ, κ — коэффициенты тепло- и температуропроводности; α, E, ν — коэффициент линейного расширения, модуль упругости и коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига; ρ — плотность.

Пондеромоторная сила

$$\vec{F} = \vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)}, \quad (8)$$

где

$$\vec{F}^{(1)} = \frac{\sigma\mu}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}), \quad \vec{F}^{(2)} = \frac{\sigma\mu}{2} \operatorname{Re}[(\vec{E} \times \vec{H}) e^{2i\omega t}].$$

Составляющая $\vec{F}^{(1)}$ не зависит от времени, а $\vec{F}^{(2)}$ — периодическая во времени функция. К уравнениям (7) необходимо присоединить начальные и граничные условия на температуру и напряженно-деформированное состояние тела.

В соответствии с выражением джоулева тепла (6) и пондеромоторной силы (8) температуру и перемещения представим в виде

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}, \quad \vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}, \quad (9)$$

где $\vec{u}^{(l)}, T^{(l)}$ удовлетворяют уравнениям (7) для $Q = Q^{(l)}$ и $\vec{F} = \vec{F}^{(l)}$ при соответствующих начальных и граничных условиях.

Составляющие $T^{(1)}$ и $\vec{u}^{(1)}$ будем находить в квазистатической постановке [2, 5, 6], пренебрегая влиянием коэффициента связанности [4], из системы уравнений

$$\Delta T^{(1)} + \frac{Q^{(1)}}{\lambda} - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} = 0,$$

$$\Delta \vec{u}^{(1)} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}^{(1)} = \frac{2\alpha(1+\nu)}{1-2\nu} \operatorname{grad} T^{(1)} - \frac{\vec{F}^{(1)}}{G}. \quad (10)$$

Функции $T^{(2)}$ и $\vec{u}^{(2)}$ определяем в установившемся режиме, т. е. будем пренебрегать влиянием начальной стадии процесса. Согласно выражениям (6) и (8) для $Q^{(2)}$ и $\vec{F}^{(2)}$ эти функции представим в виде

$$T^{(2)} = \operatorname{Re}[\varphi(\vec{r}) e^{2i\omega t}], \quad \vec{u}^{(2)} = \operatorname{Re}[\vec{\chi}(\vec{r}) e^{2i\omega t}]. \quad (11)$$

Подставляя выражения (11) в исходные уравнения, при $Q = Q^{(2)}$ и $\vec{F} = \vec{F}^{(2)}$ получим систему уравнений для определения функций φ и $\vec{\chi}$

$$\Delta \varphi + \frac{\sigma}{\lambda} \vec{E}^2(\vec{r}) - \frac{i\omega}{\kappa} \varphi - \frac{i\omega\alpha ET_0}{1-2\nu} \operatorname{div} \vec{\chi} = 0,$$

$$\Delta \vec{\chi} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\chi} + \frac{\sigma\mu}{2G} (\vec{E} \times \vec{H}) + \frac{4\rho\omega^2}{G} \vec{\chi} = \frac{2\alpha(1+\nu)}{1-2\nu} \operatorname{grad} \varphi. \quad (12)$$

3. **Определение резонансных частот электромагнитного поля для биметаллического слоя.** В работе [1] показано, что при решении задачи в рассматриваемой постановке для упругого электропроводного слоя в узкой окрестности определенных частот (резонансных) наблюдается резкое возрастание

уровней температурных полей и напряжений, обусловленных периодически во времени составляющими пондеромоторных сил и джоулева тепла. Резонансные частоты электромагнитного поля практически равны половине собственных частот колебаний упругого слоя. Для всех частот электромагнитного поля, за исключением окрестностей резонансных, температуру и напряжения можно находить, исходя из усредненного во времени джоулева тепла, пренебрегая при этом влиянием пондеромоторных сил. Поэтому представляется важным определение тех частот электромагнитного поля и соответствующих им глубин проникновения индукционных токов, при которых имеют место резонансные явления. Эти частоты можно находить, исходя из решения краевой задачи о собственных частотах упругих колебаний рассматриваемого элемента конструкции. Если собственные частоты ω_n найдены, то резонансные частоты электромагнитного поля определяются по формуле

$$\omega_n = \frac{1}{2} \omega_n^* \quad (13)$$

В качестве примера рассмотрим задачу об определении резонансных частот электромагнитного поля для биметаллического слоя (рис. 1), на поверхности $z = -l_1$ которого задана касательная составляющая напряженности электрического поля $E_y = E_0 e^{i\omega t}$. Верхнее основание свободно от силовой нагрузки, а перемещения нижнего основания отсутствуют.

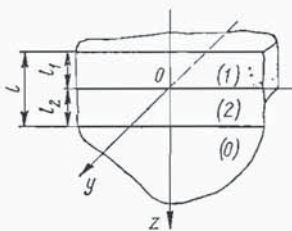


Рис. 1.

В принятой системе координат все величины зависят только от z и отличными от нуля будут перемещения $u_z(z, t) = u(z) e^{2i\omega t}$. Функция $u(z)$ в каждом из слоев удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 u_j}{dz^2} + 4\omega^2 a_j^2 u_j = \alpha_j \frac{1 + \nu_j}{1 - \nu_j} \cdot \frac{\partial T_j}{\partial z} \quad (j = 1, 2) \quad (14)$$

и граничным условиям

$$\sigma_1(-l_1) = 0; u_1(0) = u_2(0), \sigma_1(0) = \sigma_2(0); u_2(l_2) = 0. \quad (15)$$

Здесь $a_j^2 = \frac{\rho_j(1-2\nu_j)}{2G_j(1-\nu_j)}$, $\sigma_j = \sigma_z^{(j)}$ ($j = 1, 2$); индексы 1, 2 относятся соответственно к параметрам первого и второго слоя.

Решая соответствующую краевую задачу на собственные значения, приходим к уравнению для нахождения резонансных частот электромагнитного поля

$$K \cos k_1 l_1 \cos k_2 l_2 - \sin k_1 l_1 \sin k_2 l_2 = 0, \quad (16)$$

где

$$K^2 = \frac{G_2(1-\nu_2)(1-2\nu_1)\rho_2}{G_1(1-\nu_1)(1-2\nu_2)\rho_1}, \quad k_j^2 = 4a_j^2\omega^2 \quad (j = 1, 2).$$

Численные исследования резонансных частот выполнялись для биметаллического слоя медь — сталь Х18Н9Т.

Графики зависимости первых трех резонансных частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (кривые 1—3 соответственно) от толщины биметаллического слоя медь — сталь Х18Н9Т при некоторых соотношениях между толщинами составляющих слоев $K_l = \frac{l_2}{l_1}$ представлены на рис. 2 сплошными линиями для $K_l = 0$, штриховыми — для $K_l = 1$ и штрихпунктирными — для $K_l = 5$.

На рис. 3 представлены аналогичные графики для слоя сталь Х18Н9Т — медь.

Из приведенных графиков видно, что для биметаллического слоя медь—сталь Х18Н9Т при увеличении $K_l = \frac{l_2}{l_1}$ (увеличение толщины слоя из стали) резонансные частоты ω_j возрастают. Минимальные по величине

значения частот ω_j достигаются при $K_l = 0$, что соответствует однородному слою из меди толщиной l . В случае, когда со стороны индуктора расположен слой из стали, наблюдается обратная картина, т. е. с увеличением толщины слоя из меди величины резонансных частот ω_j уменьшаются и принимают наименьшие значения для однородного медного слоя толщиной l .

Отметим, что для рассматриваемых случаев с увеличением толщины биметаллического слоя значения резонансных частот падают.

Представляет интерес исследование зависимости параметра относительной глубины $\delta = \frac{\delta_*}{l_1}$ проникновения индукционных токов, соответствующего

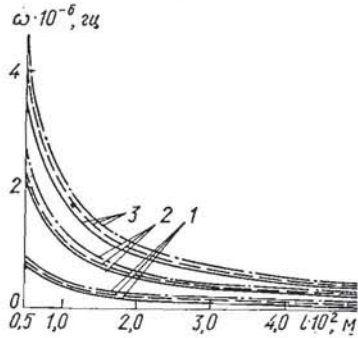


Рис. 2.

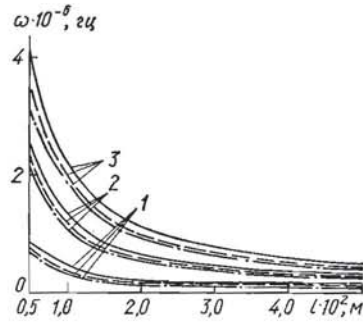


Рис. 3.

резонансным частотам ω_j ($j = 1, 2, 3$), в слое, расположенном со стороны индуктора, от толщины биметаллического слоя.

На рис. 4 сплошными линиями нанесены графики изменения δ для однородного слоя из стали X18H9T при $K_l = 0$, штриховыми — при $K_l = 1$ и штрихпунктирными — при $K_l = 5$ для биметаллического слоя сталь X18H9T — медь. Кривые 1, 2, 3 соответствуют глубинам δ_j проникновения

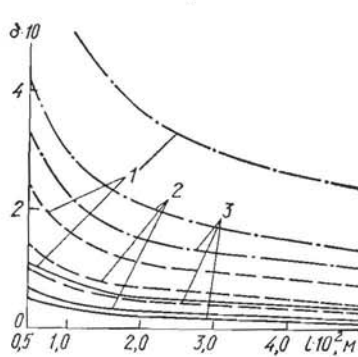


Рис. 4.

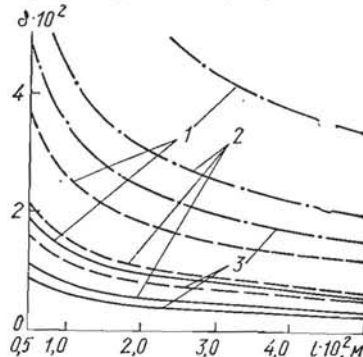


Рис. 5.

токов для резонансных частот ω_j ($j = 1, 2, 3$). Из приведенных графиков видно, что первой резонансной частоте ω_1 при $l \geq 0,005$ м соответствует приповерхностный нагрев ($\delta \leq 0,1$). При заданной толщине пластины более высоким резонансным частотам соответствуют меньшие значения δ_j . Для фиксированного l с увеличением толщины второго составляющего слоя l_2 из меди большим значениям K_l соответствуют большие значения δ .

В случае, когда со стороны индуктора первым слоем является медь, зависимости δ_j от толщины изображены на рис. 5 (кривые 1—3 аналогичны кривым 1—3 рис. 4). Как следует из приведенных данных, величина глубины проникновения δ_j на порядок меньше, чем для случая слоя сталь X18H9T — медь при всех значениях K_l .

Как видно из рисунков, для всех исследуемых случаев резонансные явления возникают при приповерхностном индукционном нагреве ($\delta \leq 0,1$).

С увеличением толщины второго слоя «резонансная» глубина проникновения индукционных токов возрастает. Если первым слоем является слой с высокой электропроводимостью или магнитной проницаемостью (малые глубины проникновения δ_*), то резонансные явления наступают при значениях δ на порядок меньших, чем в случае, когда первый слой имеет низкую электропроводимость или магнитную проницаемость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Гачкевич А. Р.— Прикладная механика, 1974, 10, 7.
2. Бурак Я. И., Чернявская Л. В.— МТТ, 1973, 2.
3. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, Л., 1948.
4. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
5. Подстригач Я. С., Колодий Б. И.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 10. «Наукова думка», К., 1970.
6. Родигин Н. М. Индукционный нагрев стальных изделий токами нормальной частоты. Металлургиздат, М., 1950.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

ОДИН СПОСОБ ОБОСНОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

Д. А. Байдак, Л. М. Зорий

1. Рассмотрим некоторую упругую систему с распределенными параметрами, находящуюся под действием заданных нагрузок. Они могут иметь консервативные и неконсервативные составляющие p_k , которые изменяются монотонно в некоторой области, содержащей точку $p_k = 0$. Данная система такая, что при изменении параметров нагрузок в этой области существует определенное состояние ее равновесия (невозмущенная форма).

Пусть исследование возмущенных форм движения рассматриваемой системы (малых колебаний ее около невозмущенной формы равновесия) сводится к смешанной задаче вида

$$L[u(x, t)] + g(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F \left(t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^n}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right);$$

$$V_{i0}[u(x, t)]_{x=0} = 0, \quad V_{i1}[u(x, t)]_{x=1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \psi(x), \quad (0 \leq x \leq 1),$$

где L — линейное дифференциальное выражение порядка $2n$ по переменной x ; $u(x, t)$ — отклонения системы от состояния равновесия ($u = 0$); функция $g(x)$, характеризующая распределение массы, положительна; постоянная $b > 0$; F — некоторая нелинейная (непрерывная) функция, исчезающая при $u \equiv 0$; V_{i0} , V_{i1} — линейные однородные формы относительно u и ее производных по x до порядка $2n - 1$ включительно; $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — некоторые заданные функции. Коэффициенты дифференциального выражения и линейных форм задачи (1) считаются непрерывно зависящими в общем случае от переменной x и параметров p_k , приложенных к системе нагрузок, и дифференцируемыми достаточное число раз.

Возмущения $u(x, t)$ предполагаются принадлежащими множеству U вещественных непрерывных по совокупности аргументов функций, удовлетворяющих краевым условиям задачи (1), непрерывно дифференцируемых