скорость; δ — прирост величины β, вызванной сопряжением поля температуры и поля деформаций.

Если скорость распространения тепла c_q значительно превышает скорость поперечной волны c_2, то выражение для δ получаем из (36), положив $\beta_q = 0$.

На рис. 5 представлена зависимость действительной и мнимой частей δ от частоты ω для алюминиевого слоя. Штриховой линией изображены графики зависимости $\mathrm{Re}\,\delta$ и $\mathrm{Im}\,\delta$ от ω при $c_q \to \infty$.

На рис. 6 в логарифмическом масштабе представлена зависимость относительного приращения фазовой скорости $\frac{\Delta c}{c_R} \approx \frac{\delta}{2\beta_R}$ и величины, обратной коэффициенту затухания $\alpha = 2\sqrt{\beta_R^3}\, l_1 \beta_0 (c_2 \,\mathrm{Im}\,\delta)^{-1}$.

Влияние конечной скорости распространения тепла на величину δ, относительное приращение фазовой скорости и коэффициент, обратный затуханию, как видим из графиков, является значительным при высоких частотах ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. «Мир», М., 1970.
2. Коваленко А. Д.— В кн.: Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. «Наука», М., 1970.
3. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.
4. Семерак Ф. В.— Автореф. канд. дис. Львовский ун-т, Львов, 1973.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИНДУКЦИОННЫЙ НАГРЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Я. И. Бурак, Л. В. Чернявская

В работе предложена методика определения джоулева тепла, температурных полей и температурных напряжений в цилиндрической оболочке при глубине проникновения индукционных токов, соизмеримой с толщиной оболочки.

1. Пусть длинная цилиндрическая оболочка радиуса R из неферромагнитного материала, отнесенная к цилиндрической системе координат (γ, φ, z) $(-h \leqslant \gamma \leqslant h,\ 2h$ — толщина оболочки) (рис. 1), находится под влиянием осесимметричного индукционного нагрева. На внешней поверхности задан вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = \{0,\ E,\ 0\}$, где $E(\gamma, z) = E_0 \cos nz$. Принимается, что глубина проникновения индукционных токов соизмерима с толщиной оболочки.

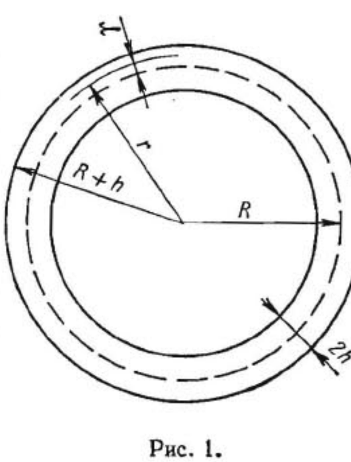

Рис. 1.

В области оболочки и вне ее при $r < R - h$ отличные от нуля кольцевые составляющие E и $E^{(0)}$ представим в виде [4]

$$E(\gamma,\ z,\ \tau) = F(\gamma)\, e^{-(k\gamma - i\omega\tau)} \cos nz,$$
$$E^{(0)}(r,\ z,\ \tau) = E^{(0)}(r)\, e^{i\omega\tau} \cos nz. \qquad (1)$$

Здесь ω — круговая частота, $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ — средняя кривизна оболочки, $k_1,\ k_2$ — главные кривизны срединной поверхности оболочки.

Из уравнений Максвелла и условий сопряжения электромагнитного поля при $\gamma = -h$, в пренебрежении токами смещения и величинами $k_1\gamma$ $k_2\gamma$ по сравнению с единицей, получим следующие соотношения для определения функции $F(\gamma)$:

$$p^2F + \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2} = 0 \text{ при } -h \leqslant \gamma \leqslant h, \tag{2}$$

$$F = F_0 \text{ при } \gamma = +h,$$

$$\frac{dF}{d\gamma} - \frac{1}{E^{(0)}} \frac{dE^{(0)}}{dr} F = 0 \text{ при } \gamma = -h \, (r = R - h), \tag{3}$$

где $p^2 = -k^2 - i\omega\mu\lambda - n^2$; λ — коэффициент электропроводности.

В условия (3) входит граничное значение напряженности электрического поля $E^{(0)}$ в области $\gamma < -h$. Поэтому система уравнений (2) — (3) должна решаться совместно с уравнением

$$\frac{d^2E^{(0)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dE^{(0)}}{dr} + (\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - n^2) E^{(0)} = 0. \tag{4}$$

Для приближенного определения $E^{(0)}$ примем, что области оболочки поставлена в соответствие физическая поверхность с характеристиками материала: $\mu_1 = 2h\mu$ — приведенная магнитная проницаемость, $\lambda_1 = 2h\lambda$ — приведенная электропроводимость, $r_1 = \frac{2h}{\mu}$ — приведенное магнитное сопротивление, $\rho_1 = \frac{2h}{\lambda}$ — приведенное электросопротивление [1]. Тогда задача об определении функции $E^{(0)}$ сводится к решению уравнения (4) при соответствующих граничных условиях на этой поверхности

$$r_1 p_1^2 (E_0 + E^{(0)}) + \frac{2}{R\mu} \left(E_0 - R \frac{dE^{(0)}}{dr} + E^{(0)} \right) = 0,$$

$$\mu_1 r_1 p_1^2 (E_0 - E^{(0)}) + \frac{2}{R\mu} \left(E_0 + R \frac{dE^{(0)}}{dr} - E^{(0)} \right) - 12 (E_0 - E^{(0)}) = 0. \tag{5}$$

Отсюда находим

$$E^{(0)}(r, z) = E_0 \frac{1 + \frac{4}{3} n^2h^2 + \frac{2}{3} \frac{i}{\delta_0^2}}{1 - \frac{2}{3} n^2h^2 - \frac{1}{3} \frac{i}{\delta_0^2}} \cdot \frac{J_1(k_1 r)}{J_1(k_1 R)} \cos nz, \tag{6}$$

где $\delta_0 = \frac{\delta}{2h}$; $\delta = 2^{1/2} (\omega\mu\lambda)^{-1/2}$ — глубина проникновения индукционных токов; $k_1^2 = -n^2 + \varepsilon_0\mu_0\omega^2$.

Таким образом, задача об определении функции F сведена к граничной задаче (2) — (3) при найденных из выражения (6) $E^{(0)}$ и $\frac{dE^{(0)}}{dr}$ при $r = R - h$.

Следуя работе [5], запишем решение уравнения (2) в виде

$$F = ph \frac{\cos p\gamma}{\cos ph} F_1 + \frac{1}{3} \frac{p^2h^2 \sin p\gamma}{(1 - ph \operatorname{ctg} ph) \sin ph} F_2. \tag{7}$$

Здесь $F_1 = \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} F d\gamma$, $F_2 = \frac{3}{2h^2} \int\limits_{-h}^{h} F\gamma d\gamma$.

Интегрируя уравнение (2) и уравнение (2), умноженное на γ, по толщине оболочки с учетом условий (3), получим систему уравнений для определения функций F_1 и F_2

$$p^2h^2F_1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{p^3h^3}{1 - ph \operatorname{ctg} ph} \operatorname{ctg} ph \, F_2 = -\frac{1}{3} h \frac{\partial E^{(0)}(R-h)}{\partial r},$$

$$p^2h^2F_2 + 3p^2h^2 \left(1 + \frac{\operatorname{ctg} ph}{ph} \right) F_1 = -3h \frac{\partial E^{(0)}(R-h)}{\partial r} + 3E_0. \tag{8}$$

Если ограничиться первыми членами разложения в ряд операторов при F_1 и F_2, то из решения системы уравнений (8) на основании (1) получим

$$E(\gamma,\ z) = E_0\left[C_1 + \frac{\gamma}{h}C_3 + i\left(C_2 + \frac{\gamma}{h}C_4\right)\right]\cos nz, \qquad (9)$$

где

$$C_1 = \left[1 - 2n^4h^4 + n^8h^8 + \frac{1}{2\delta_0^4}(1 + n^4h^4)\right]^{-1}\Bigg\{\Bigg[1 - nh\left((1 - n^2h^2)\left(1 + 2n^2h^2 - \frac{1}{3\delta_0^4}\right) + \frac{1}{\delta_0^4}\left(1 + \frac{4}{3}n^2h^2\right)\right)\Bigg]\left(1 - n^4h^4 + \frac{1}{4\delta_0^4}\right) - \frac{nh}{2\delta_0^4}(k^2h^2 + n^2h^2) \times \left[1 + 2n^2h^2 - \frac{1}{3\delta_0^4} - 2\left(1 + \frac{4}{3}n^2h^2\right)(1 - n^2h^2)\right]\Bigg\};$$

$$C_2 = \left[1 - 2n^4h^4 + n^8h^8 + \frac{1}{2\delta_0^4}(1 + n^4h^4)\right]^{-1}\delta_0^{-2}\Bigg\{\frac{nh}{2}\left[1 + 2n^2h^2 - \frac{1}{3\delta_0^4} - 2\left(1 + \frac{4}{3}n^2h^2\right)(1 - n^2h^2)\right]\left(1 - n^4h^4 + \frac{1}{4\delta_0^4}\right) + (n^2h^2 + k^2h^2)\Bigg[1 - nh\left(1 + 2n^2h^2 - \frac{1}{3\delta_0^4} - 2\left(1 + \frac{4}{3}n^2h^2\right)(1 - n^2h^2)\right) + \frac{1}{\delta_0^4}\left(1 + \frac{4}{3}n^2h^2\right)\Bigg]\Bigg\};$$

$$C_3 = \left[1 - 2n^4h^4 + n^8h^8 + \frac{1}{2\delta_0^4}(1 + n^4h^4)\right]^{-1}\delta_0^{-2}\Bigg\{\Bigg[3(n^2h^2 + k^2h^2) + nh\left(\left(1 + 2n^2h^2 - \frac{1}{3\delta_0^4}\right)\left(1 + 3n^2h^2 + 2n^4h^4 - \frac{1}{2\delta_0^4}\right) - \frac{3}{2\delta_0^4}\left(1 - \frac{16}{9}n^4h^4\right)\right)\Bigg]\left(1 - n^4h^4 + \frac{1}{4\delta_0^4}\right) - (n^2h^2 + k^2h^2)\frac{1}{2\delta_0^4}\left[3 + nh\left(1 + \frac{4}{3}n^2h^2\right)\left(5 + 12n^2h^2 - \frac{1}{2\delta_0^4} - 4n^4h^4\right)\right]\Bigg\};$$

$$C_4 = \left[1 - 2n^4h^4 + n^8h^8 + \frac{1}{2\delta_0^4}(1 + n^4h^4)\right]^{-1}\delta_0^{-2}\Bigg\{(n^2h^2 + k^2h^2) \times \Bigg[3(n^2h^2 + k^2h^2) + nh\left(\left(1 + 2n^2h^2 - \frac{1}{3\delta_0^4}\right)\left(1 + 3n^2h^2 + 2n^4h^4 - \frac{1}{2\delta_0^4}\right) - \frac{3}{2\delta_0^4}\left(1 - \frac{16}{9}n^4h^4\right)\right)\Bigg] + \frac{1 - n^4h^4 + \frac{1}{4\delta_0^2}}{2}\left[3 + nh\left(1 + \frac{4}{3}n^2h^2\right) \times \left(5 + 12n^2h^2 + 4n^4h^4 - \frac{2}{\delta_0^4}\right)\right]\Bigg\}.$$

Соответственно выражению (9), усредненная во времени по периоду колебаний электромагнитного поля плотность джоулева тепла будет

$$Q = \frac{\lambda}{2}E_0^2\left[C_1^2 + C_2^2 + 2\frac{\gamma}{h}(C_1C_3 + C_2C_4) + \frac{\gamma^2}{h^2}(C_3^2 + C_4^2)\right]\cos^2 nz. \qquad (10)$$

Если в выражении (10) положить $n = 0$, получим выражение для распределения джоулева тепла в цилиндрической оболочке в случае индукционного нагрева по толщине, т. е.

$$Q = \frac{\lambda}{2}E_0^2\left[1 - \frac{1}{2\delta_0^4} - 4kh\frac{\gamma}{h}\left(1 - \frac{5}{4\delta_0^4}\right) + \frac{9}{4\delta_0^4}\cdot\frac{\gamma^2}{h^2}\left(1 + \frac{1}{9\delta_0^4}\right)\right]. \qquad (11)$$

2. Примем, что оболочка находится в условиях конвективного теплообмена с внешней средой, температура которой постоянна и равна начальной температуре оболочки. Определение температурного поля $t(\gamma, z, \tau)$ сводится к решению уравнения теплопроводности

$$p_0^2 t + \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} = -\frac{Q}{\varkappa} \tag{12}$$

при нулевой начальной температуре и условиях теплообмена на боковых поверхностях

$$\frac{\partial t(\pm h, z, \tau)}{\partial \gamma} \pm (h_0 \mp k)\, t(\pm h, z, \tau) = 0, \tag{13}$$

где $p_0^2 = -n^2 - k^2 - a^2 \frac{\partial}{\partial \tau}$; a^{-2} — температуропроводность; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности; h_0 — коэффициент теплоотдачи; τ — время; t — температура, которая отсчитывается от ее начального значения. Исходные соотношения (12), (13) упрощены вследствие малости величин $k_1\gamma$, $k_2\gamma$ по сравнению с единицей.

Применяя к выражениям (12), (13) интегральное преобразование Лапласа, с использованием операторного метода [5] получим следующее выражение для трансформанты от температуры:

$$t^* = p_0 h \frac{\cos p_0\gamma}{\cos p_0 h}\left(T_1^* - \frac{q_1^*}{\varkappa s}\right) + \frac{1}{3}\,\frac{p_0^2 h^2 \sin p_0\gamma}{(1 - p_0 h \operatorname{ctg} p_0 h)\sin p_0 h}\left(T_2^* - \frac{q_2^*}{\varkappa s}\right) + \frac{q^*}{\varkappa s}\,. \tag{14}$$

Здесь

$$T_1^* = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t^* d\gamma, \quad T_2^* = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} \gamma t^* d\gamma,$$

$$q^* = \frac{1}{2p_1}\int_{-h}^{h} e^{-p_1|\gamma - \gamma_0|} Q(\gamma_0)\, d\gamma_0, \quad p_1^2 = a^2 s + k^2 + n^2,$$

$$q_1^* = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} q^* d\gamma, \quad q_2^* = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} q^*\gamma d\gamma,$$

s — параметр преобразования Лапласа. Звездочками обозначены трансформанты Лапласа.

Функции T_1^*, T_2^* определяются из системы уравнений

$$\begin{gathered}
p_0^2 h^2 T_1^* - \mathrm{Bi}\, p_0 h \operatorname{ctg} p_0 h\left(T_1^* - \frac{q_1^*}{\varkappa s}\right) - \frac{1}{3} kh \frac{p_0^2 h^2}{1 - p_0 h \operatorname{ctg} p_0 h}\left(T_2^* - \frac{q_2^*}{\varkappa s}\right) = \\
= \frac{\mathrm{Bi}}{2\varkappa s}(q^{*+} + q^{*-}) - \frac{kh}{2\varkappa s}(q^{*+} - q^{*-}) - \frac{h}{2\varkappa s} Q_1, \\
p_0^2 h^2 T_2^* - (1 + \mathrm{Bi})\frac{p_0^2 h^2}{1 - p_0 h \operatorname{ctg} p_0 h}\left(T_2^* - \frac{q_2^*}{\varkappa s}\right) + \\
+ 3khp_0 h \operatorname{ctg} p_0 h\left(T_1^* - \frac{q_1^*}{\varkappa s}\right) = 3(1 + \mathrm{Bi})\frac{q^{*+} - q^{*-}}{2\varkappa s} - \\
- 3kh\frac{q^{*+} + q^{*-}}{2\varkappa s} - \frac{3h}{2\varkappa s} Q_2,
\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$Q_1 = \int_{-h}^{h} Q d\gamma, \quad Q_2 = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} Q\gamma d\gamma, \quad \mathrm{Bi} = h_0 h\,.$$

3. Температурные напряжения, соответствующие данной температуре, определяются с помощью известных соотношений термоупругости тонких оболочек [2, 4]. Для свободной от силовой нагрузки цилиндрической оболочки температурные напряжения σ_{zz}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\varphi z}$ определяются по формулам

$$\sigma_{zz} = \frac{E\alpha_t}{1-\nu}\left[T_1 - t + \frac{\gamma}{h}\,\frac{4a^2c^2}{(1+\nu)(4+c^4)}\,\frac{h}{R}\left(T_1'' + \frac{a^2c^2}{3(1-\nu^2)}\,\frac{h}{R}\,T_2''\right)\cos cx\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E\alpha_t}{1-\nu}\left[T_1 - t - (1-\nu)\,T_1'' + \frac{4(1-\nu)}{4+c^4}\left(T_1'' + \frac{a^2c^2}{3(1-\nu^2)}\cdot\frac{h}{R}\,T_2''\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1 + \frac{\gamma}{h}\,\frac{\nu\, a^2c^2}{1-\nu^2}\cdot\frac{h}{R}\right)\cos cx\right], \qquad (16)$$

$$\sigma_{\varphi z} = 0,\quad x = \frac{az}{R},\quad a^4 = \frac{3(1-\nu^2)R^2}{4h^2},\quad c = \frac{2nR}{a},\quad T_i = T_i' + T_i''\cos cx.$$

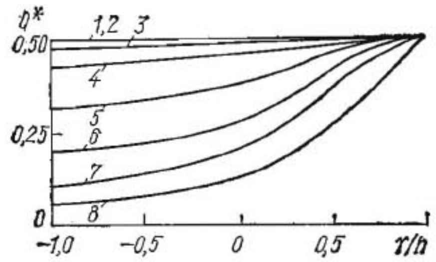

Рис. 2.

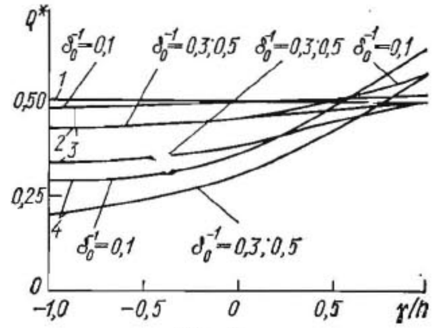

Рис. 3.

В случае плоской задачи ($c = 0$) имеем

$$\sigma_{zz} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\alpha_t E}{1-\nu}(T_1 - t),\quad \sigma_{\varphi z} = 0,\quad \sigma = \sigma^* \frac{\alpha_t E_0^2 E \lambda h^2}{(1-\nu)\varkappa},$$

где α_t — линейный коэффициент температурного расширения; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

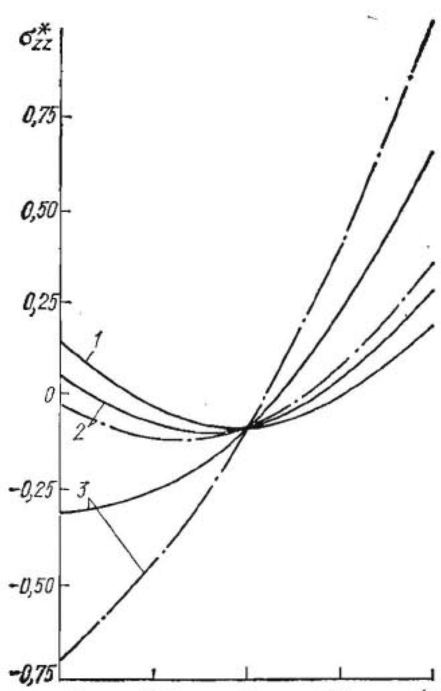

Рис. 4.

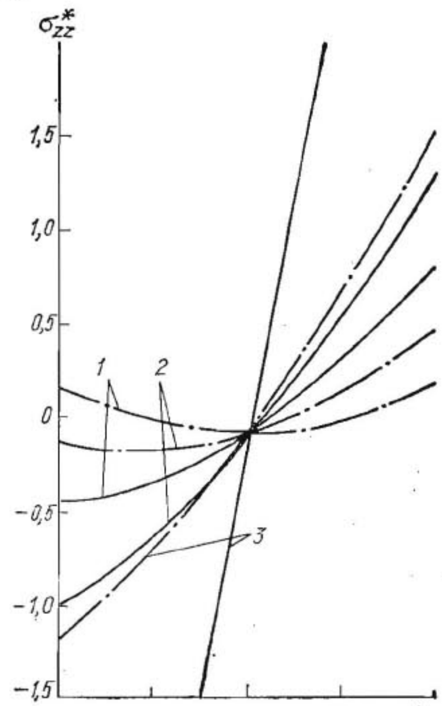

Рис. 5.

6*

Численные расчеты распределения джоулева тепла проводились для цилиндрической оболочки с $\frac{h}{R} = \frac{1}{40}$ в зависимости от параметра $\delta_0 = \frac{\delta}{2h}$, характеризующего относительную глубину проникновения электрического поля, и параметра $nh = 2lk\pi h$ ($l = 1, 2, \ldots$), характеризующего периодическое изменение электрического поля вдоль оси z. На рис. 2 представлены результаты численных расчетов $Q^* = Q/\lambda E_0^2$ при $\delta_0^{-1} = 0{,}1; 0{,}3; 0{,}5$ для точного решения (7), на рис. 3 — для приближенного решения задачи (кривые *1—8* на рис. 2 получены при $nh = 0; 0{,}039; 0{,}078; 0{,}157, 0{,}314, 0{,}471; 0{,}628; 0{,}785$, а кривые *1—4* на рис. 3 — при $nh = 0; 0{,}039; 0{,}078; 0{,}157$ соответственно).

Из результатов, приведенных на рис. 2, видно, что для параметра $0 \leqslant nh \leqslant 0{,}157$ распределение джоулева тепла по толщине оболочки близко к равномерному. Для $nh > 0{,}157$ существенно увеличивается градиентность распределения джоулева тепла по толщине оболочки.

Из сравнения результатов, приведенных на рис. 3, видно, что для параметра $nh \leqslant 0{,}078$ имеется удовлетворительное согласование распределения джоулева тепла, найденного на основании точного и приближенного решений.

Распределение осевых напряжений $5\sigma_{zz}$ по толщине оболочки представлено на рис. 4, 5. Вычисления проводились для значений времени $\tau = 1$ (рис. 4); 10 (рис. 5); ∞; $\delta_0^{-1} = 0{,}1$; $nh = 0; 0{,}039; 0{,}078$ (кривые *1—3*). Сплошными линиями представлены результаты для $\mathrm{Bi} = 0$, штрихпунктирными — для $\mathrm{Bi} = 1$. Случай $\tau = \infty$ соответствует установившемуся режиму. Характер распределения осевых напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ по толщине оболочки аналогичен характеру распределения напряжений σ_{zz}. Из приведенных графиков видно, что в установившемся режиме уровни температурных напряжений выше уровней напряжений в начальный период нагрева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Чернявская Л. В.— В кн.: Теоретическая электротехника, 6. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1969.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
5. Подстригач Я. С.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 5. «Наукова думка», К., 1965.
6. Подстригач Я. С.— ИФЖ, 1963, 10.
7. Чернявская Л. В.— ФХММ, 1973, 3.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

О ВЛИЯНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВО ВРЕМЕНИ ИЗМЕНЕНИЯ ДЖОУЛЕВА ТЕПЛА И ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ НА ТЕМПЕРАТУРУ И НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛАХ

А. Р. Гачкевич

В данной работе предложена математическая постановка задачи определения температурных полей и напряжений в электропроводных упругих телах, находящихся в периодических во времени электромагнитных полях. В исходных соотношениях учитывается периодический характер изменения во времени джоулева тепла и пондеромоторных сил, а также связанность полей деформации и температуры.