Напряженное состояние в диффузионной зоне (20), обусловленное концентрационными полями, соответственно представится в таком виде:

$$\sigma_{rr} = G\frac{1+\nu}{1-\nu}\left\{\Pi(1, t) - F(1, t) - \Pi(r, t) + F(r, t) + F(\rho)\left[\rho^2(t) - \frac{\rho^2(t)}{r^2}\right]\right\},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = G\frac{1+\nu}{1-\nu}\left\{\Pi(1, t) - F(1, t) - \Pi(r, t) - F(r, t) + F(\rho)\left[\rho^2(t) + \frac{\rho^2(t)}{r^2}\right]\right\}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Pi(r, t) = \sum_{j=1}^{2}\gamma^2\frac{g_j p_j}{1-\lambda\mu}\exp\left(-\frac{\gamma^2}{4M_j}\right)\left[Ei\,\frac{r^2}{4M_j(t_0-t)} - Ei\,\frac{\gamma^2}{4M_j}\right];$$

$$F(r, t) = \sum_{j=1}^{2} g_j\frac{4M_j(t_0-t)}{r^2}\exp\left[\frac{r^2}{4M_j(t_0-t)}\right];$$

$$\Pi(r, t)|_{r=1} = \Pi(1, t);\quad F(r, t)|_{r=1} = F(1, t);\quad F(r, t)|_{r=\rho(t)} = F(\rho);$$

$$g_1 = \mu\beta_2^{\sigma,T} - \beta_1^{\sigma,T};\quad g_2 = \lambda\beta_1^{\sigma,T} - \beta_2^{\sigma,T}.$$

Настоящее рассмотрение основано на предположении об упругом поведении материалов при повышенных температурах. Поэтому расчетные значения напряжений, найденные в рамках упругой модели, могут быть выше тех, которые, видимо, реализуются в действительности. Однако полученные расчетные формулы позволяют выяснить влияние некоторых параметров, характеризующих напряженное состояние цилиндра, возникающее в ходе диффузионного насыщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бескоровайный Н. М. и др.— В кн.: Металлургия и металловедение чистых металлов, 8. Атомиздат, М., 1969, 189.
2. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. ОНТИ, М., 1937.
3. Любов Б. Я. Кинетическая теория фазовых превращений. Металлургиздат, М., 1969.
4. Одинг Г. А.— Металловедение и термическая обработка металлов, 1966, 11, 5.
5. Подстригач Я. С., Павлина В. С.— ФХММ, 1965, 5, 383.
6. Подстригач Я. С., Швец Р. Н., Павлина В. С.— Прикладная механика, 1971, 7, 12, 11.
7. Темкин Д. Е.— ИФЖ, 1962, 5, 4, 91.
8. Щербединский Г. В.— В кн.: Защитные покрытия на металлах, 6. «Наукова думка», К., 1972, 38.
9. Щербединский Г. В., Кондраченко Л. А.— Физика металлов и металловедение, 1972, 33, 3. 487.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ТЕРМОУПРУГИХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА

Ф. В. Семерак

Последнее время интенсивное развитие получили исследования динамических связанных задач термоупругости. В частности, наиболее полно разработана теория гармонических плоских волн, изучено распространение сферических и цилиндрических волн в неограниченных телах, распространение термоупругих волн Рэлея и др. Этим вопросам посвящены работы [1, 2]. В этих работах для описания движения волн использовалась система дифференциальных уравнений взаимосвязанной задачи термоупругости, в которую входит уравнение теплопроводности параболического типа, выведенное на основе предположения о бесконечно большой скорости распространения тепла.

В данной работе исследуются плоские, сферические и цилиндрические гармонические волны в термоупругих изотропных средах с использованием уравнения теплопроводности гиперболического типа, учитывающего конечную скорость распространения тепла [3, 4].

1. Плоские гармонические волны в пространстве. Пусть в неограниченном пространстве в направлении оси x движется плоская волна, изменяющаяся во времени по гармоническому закону. Тогда в данный момент времени на произвольной плоскости, перпендикулярной к оси x, перемещения и температура постоянны. Следовательно, u, v, w, t — функции переменной x и времени τ. В этом случае система уравнений термоупругости принимает вид [1, 3]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}=m\frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}-\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial t}{\partial \tau}-\frac{1}{c_q^2}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2}=\eta l\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\tau},\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{c_2^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$c_1=\sqrt{(\lambda_t+2\mu_t)/\rho};\quad c_2=\sqrt{\mu_t/\rho};\quad c_q=\sqrt{\frac{a}{\tau_r}};\quad m=\frac{3\lambda_t+2\mu_t}{\lambda_t+2\mu_t};$$

$$\eta=\frac{3\lambda_t+2\mu_t}{\lambda}t_0\alpha_t;\quad l=1+\tau_r\frac{\partial}{\partial\tau};$$

c_1, c_2, c_q — скорости распространения продольной, поперечной волн и тепла; λ_t, μ_t — постоянные Ляме, соответствующие изотермическому состоянию; α_t — температурный коэффициент линейного расширения; λ, a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности; t_0 — температура тепла в недеформированном и ненапряженном состоянии; τ_r — время релаксации теплового потока; ρ — плотность.

Решение уравнений системы термоупругости ищем в виде

$$\Omega=\operatorname{Re}\left[\Omega^*(x,\omega)\exp(-i\omega\tau)\right]\qquad(\Omega=u,v,w,t), \tag{2}$$

где ω — частота.

Подставляя выражения (2) в (1), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд перемещений и температуры:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+\alpha_\omega^2u^*=m\frac{\partial t^*}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 t^*}{\partial x^2}+(q_\omega+\gamma_\omega^2)t^*=ia\eta q_\omega\frac{\partial u^*}{\partial x},\\ &\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2}+\alpha_\omega^2v^*=0,\quad \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}+\beta_\omega^2w^*=0,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$\alpha_\omega=\frac{\omega}{c_1},\ \beta_\omega=\frac{\omega}{c_2},\ \gamma_\omega=\frac{\omega}{c_q},\ q_\omega=\frac{i\omega}{a}.$$

Для термоупругой среды решение первых двух уравнений запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} u={}&u_+^0\exp(-i\omega\tau+ih_1x)+u_-^0\exp(-i\omega\tau-ih_1x)+\\ &+\frac{imh_2}{\alpha_\omega^2-h_2^2}\left[t_+^0\exp(-i\omega\tau+ih_2x)-t_-^0\exp(-i\omega\tau-ih_2x)\right],\\ t={}&t_+^0\exp(-i\omega\tau+ih_2x)+t_-^0\exp(-i\omega\tau-ih_2x)+\\ &+\frac{ia\eta h_1(q_\omega+\gamma_\omega^2)}{h_1^2-q_\omega-\gamma_\omega^2}\left[u_+^0\exp(-i\omega\tau+ih_1x)-u_-^0\exp(-i\omega\tau-ih_1x)\right],\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $h_{1,2}$ — корни характеристического уравнения

$$h^4 - h^2[\alpha_\omega^2 + (q_\omega + \gamma_\omega^2)(1+\varepsilon)] + \alpha_\omega^2(q_\omega + \gamma_\omega^2) = 0, \tag{5}$$

взятые со знаком «плюс». Здесь $\varepsilon = m\eta a$.

Формулы (4) — это выражения для продольных термоупругих волн, распространяющихся при постоянной частоте в направлениях x и $-x$.

Исследуем корни уравнения (5), приведя его сначала к виду

$$\zeta^4 - \zeta^2[\chi + \chi(\chi M^2 + i)(1+\varepsilon)] + \chi^3(\chi M^2 + i) = 0, \tag{6}$$

где

$$\zeta = \frac{ah}{c_1},\ M = \frac{c_1}{c_q},\ \chi = \frac{\omega}{\omega^*},\ \omega^* = \frac{c_1^2}{a}.$$

Корни уравнения (6) найдем в виде

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\chi}\,\{[\chi + (\chi M^2 + i)(1+\varepsilon) + \sqrt{2\chi}(\varphi + i\psi)]^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + [\chi + (\chi M^2 + i)(1+\varepsilon) - \sqrt{2\chi}(\varphi + i\psi)]^{\frac{1}{2}}\},\\
\zeta_2 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\chi}\,\{[\chi + (\chi M^2 + i)(1+\varepsilon) + \sqrt{2\chi}(\varphi + i\psi)]^{\frac{1}{2}} - \\
&\quad - [\chi + (\chi M^2 + i)(1+\varepsilon) - \sqrt{2\chi}\ \varphi + i\psi)]^{\frac{1}{2}}\},
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$\varphi = (\sqrt{1+\chi^2M^4} + \chi M^2)^{\frac{1}{2}},\ \psi = (\sqrt{1+\chi^2M^4} - \chi M^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Разложив выражения (7) по степеням $\frac{1}{\chi}$ и χ, найдем приближенное выражение корней ζ_1 и ζ_2 для граничных случаев $\chi \gg 1$ и $\chi \ll 1$ соответственно.

Для высоких частот имеем·

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= \chi\sqrt{\frac{H_1}{2}}\left\{\left[1 + L_1(nL_1 - 2H_1L_2)(32n^3H_1^2\chi^2)^{-1} + o\left(\frac{1}{\chi^4}\right)\right] + iL_1 \times\right.\\
&\times\left[(4nH_1\chi)^{-1} + (4kH_1^2L_2 + nL_1L_2H_1 - n^3L_1^2)(128n^5H_1^3\chi^3)^{-1} + \right.\\
&\left.\left.+ o\left(\frac{1}{\chi^5}\right)\right]\right\},\\
\zeta_2 &= \chi\sqrt{\frac{H_2}{2}}\left\{\left[1 + L_2(nL_2 + 2H_1L_1)(32n^3H_2^2\chi^2)^{-1} + o\left(\frac{1}{\chi^4}\right)\right] + \right.\\
&\left.+ iL_2\left[(4nH_2\chi)^{-1} + (4kH_2^2L_1 + nL_1L_2 - n^3L_2^2)(128n^5H_2^3\chi^3)^{-1} + o\left(\frac{1}{\chi^5}\right)\right]\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где

$$H_{1,2} = m_1 \pm n,\ L_{1,2} = 2(1+\varepsilon)n \pm k,\ m_1 = 1 + M^2(1+\varepsilon),$$

$$k = 2[\varepsilon - 1 + M^2(1+\varepsilon)^2],\ n = [1 - 2M^2(1-\varepsilon) + M^4(1+\varepsilon)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Фазовые скорости и коэффициенты затухания в этом случае будут

$$v_i^\infty = \frac{c_1}{H_i}\sqrt{2H_i},\ q_i^\infty = \frac{L_i}{8nH_i}\sqrt{2H_i}\frac{\omega^*}{c_1},\qquad i = 1,\ 2. \tag{9}$$

где $h_{1,2}$ — корни характеристического уравнения

Для низких частот выражения корней уравнения (6) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= \sqrt{\frac{\chi}{2}(1+\varepsilon)}\left\{\left[1+\frac{N_1}{8(1+\varepsilon)}\chi+\frac{N_1^2-4L_1L_2}{128(1+\varepsilon)^4}\chi^2+\right.\right.\\
&\left.+\frac{4(4k+N_1)L_1L_2-N_1^2}{1024(1+\varepsilon)^6}\chi^3+o(\chi^4)\right]+i\left[1-\frac{N_1}{8(1+\varepsilon)^2}\chi+\frac{N_1^2-4L_1L_2}{128(1+\varepsilon)^4}\times\right.\\
&\left.\left.\times\chi^2-\frac{4(4k+N_1)L_1L_2-N_1^3}{1024(1+\varepsilon)^6}\chi^3+o(\chi^4)\right]\right\},\\
\zeta_2 &= \frac{\chi}{2}\sqrt{\frac{N_2}{1+\varepsilon}}\left\{\left[1+\frac{L_1L_2(L_1L_2-8kN_2)}{128(1+\varepsilon)^2N_2^2}\chi^2+o(\chi^4)\right]+\right.\\
&\left.+i\left[\frac{L_1L_2}{8(1+\varepsilon)^2N_2}\chi+\frac{L_1L_2[8N_2(kL_1L_2+L_3N_2)-L_1^2L_2^2}{1024(1+\varepsilon)^6N_2^3}\chi^2+o(\chi^5)\right]\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где

$$N_{1,2}=2(1+\varepsilon)m_1\pm k,\ L_3=4(1+\varepsilon)^2n^2-5k^2.$$

Таблица 1

v_1^{∞}		v_2^{∞}		q_1^{∞}		q_2^{∞}	
$M=0$	$M=1{,}29$	$M=0$	$M=1{,}29$	$M=0$	$M=1{,}29$	$M=0$	$M=1{,}29$
∞	$3{,}314\cdot10^3$	$4{,}360\cdot10^3$	$4{,}445\cdot10^3$	∞	$1{,}490\cdot10^5$	$3{,}290\cdot10^3$	$5{,}825\cdot10^3$

Фазовые скорости и коэффициенты затухания имеют вид

$$v_1=\sqrt{\frac{2\chi}{1+\varepsilon}}\left(1+\frac{N_1\chi}{8(1+\varepsilon)^2}\right)c_1,\ q_1=\sqrt{\frac{\chi}{2}(1+\varepsilon)}\left(1-\frac{N_1\chi}{8(1+\varepsilon)^2}\right)\frac{\omega^*}{c_1},$$

$$v_2=2\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{N_2}}c_1,\ q_2=\frac{L_1L_2\sqrt{N_2}\chi^2}{16(1+\varepsilon)^{5/2}N_2}\cdot\frac{\omega^*}{c_1}. \quad (11)$$

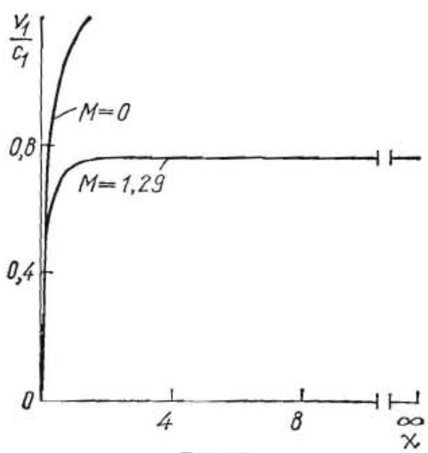

Рис. 1.

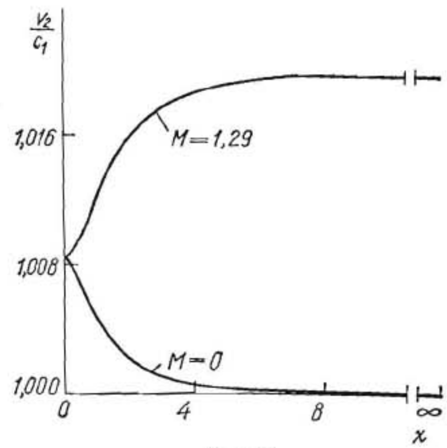

Рис. 2.

В табл. 1 приведены значения фазовых скоростей и коэффициентов затухания в предельном случае для бесконечно больших значений частоты колебания в случае конечной и бесконечно большой скорости распространения тепла в среде из меди ($M = 1{,}29$).

На рис. 1, 2 приведены графики зависимости величин $\frac{v_1}{c_1}$, $\frac{v_2}{c_1}$ от параметра χ для среды из меди, а на рис. 3, 4 — аналогичные зависимос-

Таблица 2

χ	$\frac{v_1}{c_1}$		$\frac{v_2}{c_1}$		$\frac{q_1}{q_1^\infty}$		$\frac{q_2}{q_2^\infty}$	
	$M=0$	$M=1,29$	$M=0$	$M=1,29$	$M=0$	$M=1,29$	$M=0$	$M=1,29$
0,1	0,4432	0,4080	1,0083	1,0084	0	0,5522	0,0095	0,0055
0,3	0,7669	0,6030	1,0077	1,0089	0	0,8151	0,0798	0,0473
0,5	0,9900	0,6670	1,0068	1,0097	0	0,9133	0,1954	0,1221
0,7	1,1719	0,7113	1,0057	1,0107	0	0,9569	0,3244	0,2161
1,0	1,4024	0,7347	1,0043	1,0123	0	0,9842	0,4987	0,3639
3,0	2,4413	0,7575	1,0008	1,0178	0	1,0009	0,9033	0,8448
10,0	4,4681	0,7600	1,0001	1,0195	0	1,0001	0,9921	0,9840

ти величин $\frac{q_1}{q_1^\infty}$, $\frac{q_2}{q_2^\infty}$. Из графиков видно, что фазовая скорость v_1 меньше c_q $\left(\text{для меди } \frac{c_q}{c_1}=0,775,\ \left(\frac{v_1}{c_1}\right)_{\chi\to\infty}=0,761,\ \left(\frac{v_2}{c_1}\right)_{\chi\to\infty}=1,0196\right)$, а v_2 — больше c_1.

В табл. 2 для сравнения приведены при некоторых χ величины $\frac{v_1}{c_1}$, $\frac{v_2}{c_1}$, $\frac{q_1}{q_1^\infty}$ и $\frac{q_2}{q_2^\infty}$ в случае конечной и бесконечно большой скорости распространения тепла. Как видно, учет конечной скорости распространения

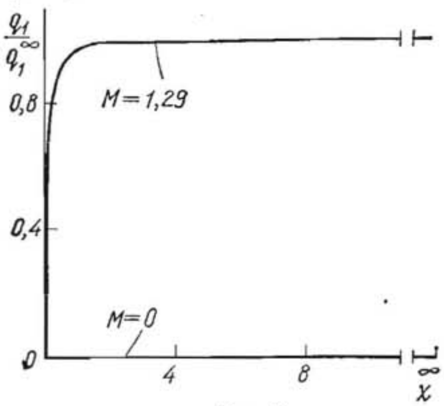

Рис. 3.

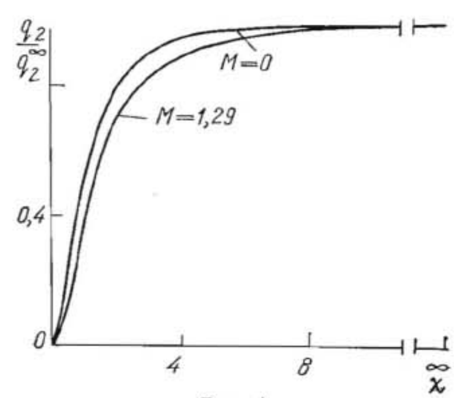

Рис. 4.

тепла приводит к существенным изменениям фазовых скоростей и коэффициентов затухания.

Выражения перемещения и температуры имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
u &= u_+^0 \exp[-\psi_1 f + i(\zeta\xi - \varphi_1 f)] + u_-^0 \exp[-\psi_2 f + i(\zeta\xi - \varphi_2 f)] + \\
&+ \frac{iam\zeta}{c_1(\chi_3^2 - \zeta^2)} t_+^0 \exp[-\psi_3 f + i(\zeta\xi - \varphi_3 f)] + \frac{iam\zeta}{c_1(\chi_4^2 - \zeta^2)} t_-^0 \exp[-\psi_4 f + \\
&+ i(\zeta\xi - \varphi_4 f)], \\
t &= t_+^0 \exp[-\psi_3 f + i(\zeta\xi - \varphi_3 f)] + t_-^0 \exp[-\psi_4 f + i(\zeta\xi - \varphi_4 f)] + \\
&+ \frac{ic_1\eta\zeta\chi_1(M^2\chi_1 + i)}{\zeta^2 - \chi_1(M^2\chi_1 + i)} u_+^0 \exp[-\psi_1 f + i(\zeta\xi - \varphi_1 f)] + \frac{ic_1\eta\zeta\chi_2(M^2\chi_2 + i)}{\zeta^2 - \chi_2(M^2\chi_2 + i)} \times \\
&\times u_-^0 \exp[-\psi_2 f + i(\zeta\xi - \varphi_2 f)].
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Здесь

$$\chi_j = \varphi_j - i\psi_j \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \quad (13)$$

являются корнями уравнения

$$M^2\chi^4 + i\chi^3 - [1 + M^2(1+\varepsilon)]\zeta^2\chi^2 - i\zeta^2(1+\varepsilon)\chi + \zeta^4 = 0, \tag{14}$$

где

$$\varphi_{1,2} = -0{,}25F \pm \Phi_1(F), \quad \varphi_{3,4} = 0{,}25F \pm \Phi_1(-F),$$

$$\psi_{1,2} = 0{,}25M^{-2} \pm \Phi_2(F), \quad \psi_{3,4} = 0{,}25M^{-2} \pm \Phi_2(-F),$$

$$\Phi_{1,2}(F) = [0{,}5(\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \pm d_1)]^{\frac{1}{2}},$$

$$d_1 = 2^{-4}(F^2 - M^{-4}) - g, \; d_2 = 0{,}125FM^{-2} - M^{-2}F^{-1}g - \frac{\zeta^2(1+\varepsilon)}{F(1+M^2)},$$

$$F^2 = 8g - M^{-2}\{1 - 4\zeta^2[1 + M^2(1+\varepsilon)],$$

g — действительный корень уравнения

$$8M^4g^3 + 4M^2\zeta^2[1 + M^2(1+\varepsilon)]g^2 + 2\zeta^2(1 + \varepsilon - 4M^2\zeta^2)g +$$
$$+ \zeta^4\{1 - 4\zeta^2[1 + M^2(1+\varepsilon)] + (1+\varepsilon)\} = 0,$$

а $\xi = \frac{c_1 x}{a}$.

2. Плоские гармонические волны в полупространстве. Рассмотрим полупространство $x > 0$, в котором волны распространяются в направлении оси x. Температура поверхности полупространства изменяется по гармоническому закону

$$t(0, \tau) = \theta_0 \exp(-i\omega\tau) \tag{15}$$

и поверхность $x = 0$ свободна от внешней нагрузки

$$\sigma_{xx}(0, \tau) = 0. \tag{16}$$

В этом случае выражения для перемещения и температуры будут

$$\left.\begin{aligned}
u &= mt^0\left[\frac{ih_1\theta_0}{h_1^2 - \alpha_\omega^2}\exp(-i\omega\tau + ih_1x) - \frac{ih_2}{h_2^2 - \alpha_\omega^2}\exp(-i\omega\tau + ih_2x)\right] - \\
&- \frac{imh_1\theta_0}{h_1^2 - \alpha_\omega^2}\exp(-i\omega\tau + ih_1x), \\
t &= t^0[\exp(-i\omega\tau + ih_2x) - \exp(-i\omega\tau + ih_1x)] + \\
&+ \theta_0\exp(-i\omega\tau + ih_1x),
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где

$$t^0 = \frac{\theta_0}{h_1^2 - h_2^2}[h_1^2 - (q_\omega + \gamma_\omega^2)(1+\varepsilon)].$$

При известных u и t по формулам [1] находим выражения для напряжений в безразмерных величинах

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= (\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^{-1}[\zeta_1^2 - \chi(M^2\chi + i)(1+\varepsilon)]\left[\frac{\chi^2}{\chi^2 - \zeta_1^2}\exp(-i\chi f + i\zeta_1\xi) - \right. \\
&\left. - \frac{\chi^2}{\chi^2 - \zeta_2^2}\exp(-i\chi f + i\zeta_2\xi)\right] - \frac{\varkappa^2}{\chi^2 - \zeta_1^2}\exp(-i\chi f + i\zeta_1\xi), \\
\sigma_y &= \sigma_z = (\zeta_1^2 - \zeta_2^2)^{-1}[\zeta_1^2 - \chi(M^2\chi + i)(1+\varepsilon)]\left[\frac{\chi^2 + \zeta_1^2(\lambda_t^* - 1)}{\chi^2 - \zeta_1^2}\times\right. \\
&\left.\times\exp(-i\chi f + i\zeta_1\xi) - \frac{\chi^2 + \zeta_2^2(\lambda_t^* - 1)}{\chi^2 - \zeta_2^2}\exp(-i\chi f + i\zeta_2\xi)\right] - \\
&- \frac{\chi^2 + \zeta_1^2(\lambda^* - 1)}{\chi^2 - \zeta_1^2}\exp(-i\chi f + i\zeta_1\xi),
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{ii}}{m\theta_0 (2\mu_t + \lambda_t)} \qquad (i = x,\, y,\, z),\ \lambda_t^* = \frac{\lambda_t}{2\mu_t + \lambda_t}.$$

Для выяснения влияния частоты на изменение амплитуды напряжений в табл. 3 приведены значения амплитуды напряжений в полуограниченном теле из меди в случае бесконечно большой и конечной скорости распространения тепла для различных значений частоты χ.

3. Сферические волны в пространстве. Исследуем распространение сферических волн в неограниченной термоупругой среде. В этом случае радиальное перемещение u зависит от радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и времени τ. Продольные сферические волны возникают под влиянием ряда возмущений (например, точечных сосредоточенных тепловых источников),

Таблица 3

Безразмерная частота $\chi = \frac{\omega}{\omega^*}$	Значения амплитуды напряжений			
	σ_x^*		$\sigma_y^* = \sigma_z^*$	
	$M=0$	$M=1{,}29$	$M=0$	$M=1{,}29$
0,5	0,18	0,17	0,27	0,32
1	0,66	0,35	0,52	0,33
2	0,93	0,73	0,79	0,38
5	1,15	1,62	1,07	0,64
10	1,35	2,17	1,02	0,83
20	1,13	2,02	1,02	0,80
50	1,05	1,92	1,01	0,77
100	1,01	1,87	0,99	0,75

Таблица 4

Безразмерная частота $\chi = \frac{\omega}{\omega^*}$	Значения амплитуды напряжений			
	σ_r^*		$\sigma_\varphi^* = \sigma_\theta^*$	
	$M=0$	$M=1{,}29$	$M=0$	$M=1{,}29$
0,5	0,48	0,52	0,48	0,37
1	1,26	1,25	0,90	0,96
2	2,67	2,71	2,28	1,97
5	4,17	6,16	3,98	4,53
10	3,72	8,62	3,75	6,48
20	3,62	9,19	3,59	7,27
50	3,56	9,68	3,53	7,41
100	3,55	9,66	3,53	7,40

а также в неограниченной среде со сферической полостью, на поверхности которой задано воздействие в виде равномерного нагрева, равномерной нагрузки или равномерной деформации.

Для исследования сферических волн имеем систему уравнений [1, 3]

$$\Delta t - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} - \frac{1}{c_q^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} - \eta l \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0. \tag{19}$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = mt, \tag{20}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}$ — оператор Лапласа.

Выражения термоупругого потенциала и температуры для неограниченной термоупругой среды имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \Phi(r,\ \tau) &= \frac{1}{r}\left[\Phi^0 \exp(-i\omega\tau + ih_1 r) + \frac{m}{\alpha_\omega^2 - h_2^2}\, t^0 \exp(-i\omega\tau + ih_2 r)\right], \\ t(r,\ \tau) &= \frac{1}{r}\left[t^0 \exp(-i\omega\tau + ih_2 r) + \frac{a\eta h_1^2 (q_\omega + \gamma_\omega^2)}{q_\omega + \gamma_\omega^2 - h_1^2} \times \right. \\ &\left. \times\, \Phi^0 \exp(-i\omega\tau + ih_1 r)\right], \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где

$$h_1^2 + h_2^2 = (q_\omega + \gamma_\omega^2)(1 + \varepsilon) + \alpha_\omega^2,\ \ h_1^2 h_2^2 = \alpha_\omega^2 (q_\omega + \gamma_\omega^2).$$

По известной функции Φ определяем перемещения, деформации и напряжения.

Рассмотрим распространение сферических волн в неограниченной термоупругой среде со сферической полостью радиуса R. На границе $r = R$

температура изменяется по гармоническому закону, поверхность тела свободна от внешней нагрузки, т. е.

$$t(R, \tau) = \theta_0 \exp(-i\omega\tau), \quad \sigma_{rr}(R, \tau) = 0.$$

Термоупругий потенциал и температура запишутся в этом случае так:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi = -\frac{mR}{r\varkappa}\theta_0 \{n_1 \exp[ih_2(r-R)] - n_2 \exp[ih_1(r-R)]\} \exp(-i\omega\tau), \\ &t = \frac{R}{r\varkappa}\theta_0 \{n_1(h_2^2 - \alpha_\omega^2)\exp[ih_2(r-R)] - n_2(h_1^2 - \alpha_\omega^2) \times \\ &\times \exp[ih_1(r-R)]\} \exp(-i\omega\tau), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где

$$\varkappa = (h_2^2 - \alpha_\omega^2) n_1 - (h_1^2 - \alpha_\omega^2) n_2,$$

$$n_{1,2} = 4\mu_t(1 - ih_{1,2}R) - \rho R^2\omega^2.$$

Используя выражение термоупругого потенциала перемещений, получим такие выражения безразмерных температурных напряжений:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r = \frac{P}{p^3\varkappa^*}\{n_1^* k_2^* \exp[i\zeta_2(p-P)] - n_2^* k_1^* \exp[i\zeta_1(p-P)]\} \exp(-i\chi f), \\ &\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{P}{p^3\varkappa^*}\{n_1^* l_2^* \exp[i\zeta_2(p-P)] - n_2^* l_1^* \times \\ &\times \exp[i\zeta_1(p-P)]\} \exp(-i\chi f), \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где

$$\sigma_j = \frac{\sigma_{jj}}{m\mu_t\theta_0}\ (j = r,\ \varphi,\ \theta); \quad P = \frac{c_1 R}{a}; \quad p = \frac{c_1 r}{a};$$

$$n_{1,2}^* = 4(1 - i\zeta_{1,2}P) - \rho^*\chi^2 P^2; \quad \rho^* = \frac{c_1^2\rho}{\mu_t};$$

$$k_{1,2}^* = 4(i\zeta_{1,2}p - 1) + \rho^*\chi^2 p^2;$$

$$l_{1,2}^* = 2(1 - i\zeta_{1,2}p - P^2\zeta_{1,2}^2) + \rho^*\chi^2 p^2;$$

$$\varkappa^2 = (\zeta_2^2 - \chi^2) n_1^* - (\zeta_1^2 - \chi^2) n_2^*.$$

В табл. 4 приведены значения амплитуды напряжений в неограниченном теле из меди со сферической полостью в случае конечной и бесконечно большой скорости распространения тепла при некоторых значениях частоты. Анализ результатов показывает, что учет конечной скорости распространения тепла приводит к значительному увеличению амплитуды напряжений при высоких частотах ω.

4. Цилиндрические волны в пространстве. Цилиндрические волны могут возникать под действием линейного источника или же в неограниченной среде с цилиндрической полостью, на поверхности которой заданы равномерно распределенное давление, тепловой поток или деформация.

Пусть перемещение и температура зависят от переменных $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и τ. Термоупругий потенциал перемещения удовлетворяет уравнению [1, 3]

$$\left[\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left(\Delta - \frac{1}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{c_q^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) - m\eta l\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta\right]\Phi = 0, \tag{24}$$

а температура — уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Phi = mt, \tag{25}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}.$$

Решение уравнения (24) запишем в виде

$$\Phi = [A_1 H_0^{(1)}(h_1 r) + A_2 H_0^{(1)}(h_2 r)] \exp(-i\omega\tau), \tag{26}$$

где

$$h_1^2 + h_2^2 = (q_\omega + \gamma_\omega^2)(1+\varepsilon) + \alpha_\omega^2, \quad h_1^2 h_2^2 = \alpha_\omega^2 (q_\omega + \gamma_\omega^2),$$

$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z)$ — функция Ханкеля; $J_0(z)$, $Y_0(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода действительного аргумента.

Выражение для температуры получим по формуле (25), т. е.

$$t = \frac{1}{m}[A_1(\alpha_\omega^2 - h_1^2) H_0^{(1)}(h_1 r) + A_2(\alpha_\omega^2 - h_2^2) H_0^{(1)}(h_2 r)] \exp(-i\omega\tau). \tag{27}$$

После определения A_i, используя выражение (26) для функции Φ, можно найти перемещения и напряжения.

Рассмотрим бесконечное пространство с цилиндрической полостью радиуса $r = R$. Пусть на краевой поверхности тела $r = R$ задана температура, изменяющаяся во времени по гармоническому закону

$$t(R, \tau) = \theta_0 \exp(-i\omega\tau), \tag{28}$$

причем поверхность $r = R$ свободна от внешней нагрузки, т. е.

$$\sigma_{rr}(R, \tau) = 0.$$

Для термоупругого потенциала и температуры имеем выражения

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{m}{\varkappa}\theta_0 [n_2 H_0^{(1)}(h_1 r) - n_1 H_0^{(1)}(h_2 r)] \exp(-i\omega\tau), \\ t &= \frac{2}{\varkappa}\theta_0 [n_2(\alpha_\omega^2 - h_1^2) H_0^{(1)}(h_1 r) - n_1(\alpha_\omega^2 - h_2^2) H_0^{(1)}(h_2 r)] \exp(-i\omega\tau), \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

а для температурных напряжений — такие выражения:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \Big\{\frac{2}{p\varkappa^*}[n_2^*\zeta_1 H_1^{(1)}(\zeta_1 p) - n_1^*\zeta_2 H_1^{(1)}(\zeta_2 p)] + \\ &+ \frac{\chi^2}{\varkappa^*}[n_2^* H_0^{(1)}(\zeta_1 p) - n_1^* H_0^{(1)}(\zeta_2 p)]\Big\} \exp(-i\chi f), \\ \sigma_\varphi &= \Big\{\frac{2}{\varkappa^*}[n_2^*\zeta_1^2 H_0^{(1)}(\zeta_1 p) - n_2^*\zeta_1 p^{-1} H_1^{(1)}(\zeta_1 p) - n_1^*\zeta_2^2 H_0^{(1)}(\zeta_2 p) + n_1^*\zeta_2 p^{-1} \times \\ &\times H_1^{(1)}(\zeta_2 p)] + \frac{\chi^2 p^*}{\varkappa^*}[n_2^* H_0^{(1)}(\zeta_1 p) - n_1^* H_0^{(1)}(\zeta_2 p)]\Big\} \exp(-i\omega\tau), \\ \sigma_z &= \frac{1}{\varkappa^*}[n_2^* m_1^* H_0^{(1)}(\zeta_1 p) - n_1^* m_2^* H_0^{(1)}(\zeta_2 p)] \exp(i - i\omega\tau), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где

$$n_j = 2\mu_j h_j H_1^{(1)}(h_j R) - R\rho\omega^2 H_0^{(1)}(h_j R), \qquad j = 1,\ 2,$$

$$n_j^* = 2\zeta_j H_1^{(1)}(\zeta_j P) - P\rho^*\chi^2 H_0^{(1)}(\zeta_j P),$$

$$\varkappa^* = (\chi^2 - \zeta_1^2) n_2^* H_0^{(1)}(\zeta_1 P) - (\chi^2 - \zeta_2^2) n_1^* H_0^{(1)}(\zeta_2 P),$$

$$m_j^* = 2\zeta_j^2 + \chi^2\rho^*, \quad \varkappa = \frac{a\varkappa^*}{c_1}.$$

5. Распространение волны в слое. Пусть в неограниченном термоупругом слое толщиной $2l_1$ в положительном направлении оси y движется плоская гармоническая во времени волна. В случае учета конечной скорости распространения тепла движение волны описывается следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\Delta - \frac{1}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{c_q^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)t - \eta l\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta\Phi = 0, \\ &\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Phi - mt = 0, \quad \left(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\psi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Положив, что

$$\Omega(x,\ y,\ \tau) = \Omega^*(x,\ y)\exp(i\omega\tau) \quad (\Omega = t,\ \Phi,\ \psi), \tag{32}$$

систему (31) приведем к следующему виду:

$$[\Delta - (q_\omega - \gamma_\omega^2)]\,t^* + a\eta\,(q_\omega - \gamma_\omega^2)\,\Delta\Phi^* = 0,$$
$$(\Delta + \alpha_\omega^2)\,\Phi^* - mt^* = 0,\ (\Delta + \beta_\omega^2)\,\psi^* = 0. \tag{33}$$

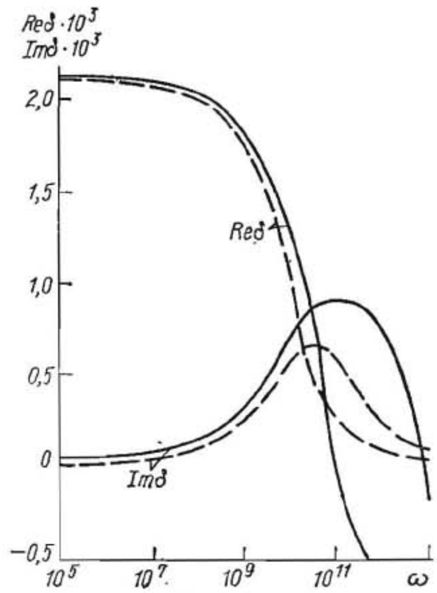

Рис. 5.

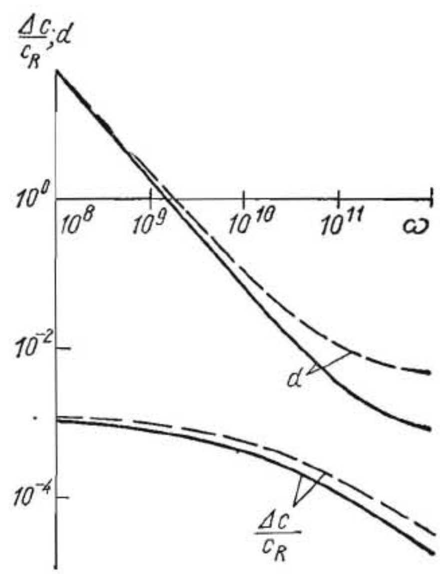

Рис. 6.

В системе (33) исключим t^* из первых двух уравнений, а решение полученной системы возьмем в виде

$$\Phi^*(x,\ y) = \varphi_1(x)\exp(-i\alpha y),$$
$$\psi^*(x,\ y) = \varphi_2(x)\exp(-i\alpha y). \tag{34}$$

В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\varphi_1^{\mathrm{IV}} - \varphi_1''\,[2\alpha^2 + (1+\varepsilon)(q_\omega - \gamma_\omega^2) - \alpha_\omega^2] +$$
$$+ \varphi_1\,[\alpha^4 + \alpha^2(1+\varepsilon)(q_\omega - \gamma_\omega^2) - \alpha_\omega^2(\alpha^2 - q_\omega + \gamma_\omega^2)] = 0, \tag{35}$$
$$\varphi_2'' - (\alpha^2 - \beta_\omega^2)\,\varphi_2 = 0.$$

Решая эту систему, как в работе [1], приходим к следующему выражению:

$$\delta = -\{\varepsilon\beta_1(i\beta_0 - \beta_q)[\beta_0 + i(\beta_1 - \beta_q)]^2[1 - 0{,}5\beta_R(\beta_1 + \beta_q - i\beta_0)] -$$
$$-[1 + \beta_R(i\beta_0 - \beta_q)]^{\frac{1}{2}}(1 - \beta_1\beta_R)^{\frac{1}{2}}\}/\{[(\beta_1 - \beta_q)^2 + \beta_0^2](1 - \beta_1\beta_R)[0{,}5\beta_1(1 -$$
$$-\beta_1\beta_R)^{-1} + 0{,}5(1 - \beta_R)^{-1} - (1 - 0{,}5\beta_R)^{-1}]\}^{-1}. \tag{36}$$

Здесь $\beta_R = \left(\frac{c_R}{c_2}\right)^2$; $\beta_0 = \left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2$; $\beta_1 = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2$; $\beta_q = \left(\frac{c_2}{c_q}\right)^2$; $\beta = \beta_R = \left(\frac{c}{c_2}\right)^2$;

$$c_0 = \sqrt{a\omega};$$

$c = \frac{\omega}{\alpha}$ для действительного значения α, $c = \frac{\omega}{\operatorname{Re}\alpha}$ для комплексного α; c_R — скорость распространения поверхности волн Рэлея; c — фазовая скорость; δ — прирост величины β, вызванной сопряжением поля температуры и поля деформаций.

Если скорость распространения тепла c_q значительно превышает скорость поперечной волны c_2, то выражение для δ получаем из (36), положив $\beta_q = 0$.

На рис. 5 представлена зависимость действительной и мнимой частей δ от частоты ω для алюминиевого слоя. Штриховой линией изображены графики зависимости $\mathrm{Re}\,\delta$ и $\mathrm{Im}\,\delta$ от ω при $c_q \to \infty$.

На рис. 6 в логарифмическом масштабе представлена зависимость относительного приращения фазовой скорости $\frac{\Delta c}{c_R} \approx \frac{\delta}{2\beta_R}$ и величины, обратной коэффициенту затухания $\alpha = 2\sqrt{\beta_R^3} l_1 \beta_0 (c_2 \,\mathrm{Im}\,\delta)^{-1}$.

Влияние конечной скорости распространения тепла на величину δ, относительное приращение фазовой скорости и коэффициент, обратный затуханию, как видим из графиков, является значительным при высоких частотах ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. «Мир», М., 1970.
2. Коваленко А. Д.— В кн.: Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. «Наука», М., 1970.
3. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.
4. Семерак Ф. В.— Автореф. канд. дис. Львовский ун-т, Львов, 1973.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИНДУКЦИОННЫЙ НАГРЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Я. И. Бурак, Л. В. Чернявская

В работе предложена методика определения джоулева тепла, температурных полей и температурных напряжений в цилиндрической оболочке при глубине проникновения индукционных токов, соизмеримой с толщиной оболочки.

1. Пусть длинная цилиндрическая оболочка радиуса R из неферромагнитного материала, отнесенная к цилиндрической системе координат (γ, φ, z) $(-h \leqslant \gamma \leqslant h,\ 2h$ — толщина оболочки) (рис. 1), находится под влиянием осесимметричного индукционного нагрева. На внешней поверхности задан вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = \{0,\ E,\ 0\}$, где $E(\gamma, z) = E_0 \cos nz$. Принимается, что глубина проникновения индукционных токов соизмерима с толщиной оболочки.

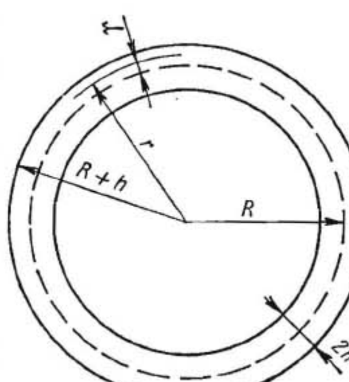

Рис. 1.

В области оболочки и вне ее при $r < R - h$ отличные от нуля кольцевые составляющие E и $E^{(0)}$ представим в виде [4]

$$E(\gamma,\ z,\ \tau) = F(\gamma)\, e^{-(k\gamma - i\omega\tau)} \cos nz,$$
$$E^{(0)}(r,\ z,\ \tau) = E^{(0)}(r)\, e^{i\omega\tau} \cos nz. \qquad (1)$$

Здесь ω — круговая частота, $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ — средняя кривизна оболочки, k_1, k_2 — главные кривизны срединной поверхности оболочки.