

отверстий и геометрического параметра δ . Через σ_0^* обозначено напряжение в пластинке без кольца [3].

3. Растяжение пластинки.

На бесконечности пластинка растягивается усилиями $\sigma_x^\infty = p$, $\sigma_y^\infty = q$, $\tau_{xy}^\infty = 0$. Тогда

$$\text{и} \quad \Phi_*(z) = c_1 z; \quad \Psi_*(z) = d_1 z; \quad c_1 = \frac{p+q}{4}; \quad d_1 = -\frac{p-q}{2}$$

$$P_n^{(1)} = 2(1-\kappa)c_1 r_1 \left(\delta_{-n} + \frac{1}{4} \varepsilon_1^{-1} \delta_{-n+1} \right) + d_1 r_1 \left(\delta_{-n+2} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^{-1} \delta_{-n+1} \right);$$

$$P_n^{(2)} = -d_1 r_1 \delta_{-n}; \quad P_n^{(3)} = 2c_1 r_1 \delta_{-n}.$$

При растяжении пластинки вдоль и поперек линии центров на рис. 2 и 3, для некоторых значений δ , соответственно показано влияние расстояния между центрами отверстий на минимальную величину посадки ε_{\min} .

Для числового примера была взята медная пластинка и стальное кольцо со следующими геометрическими и упругими постоянными: $\mu = 4,34 \times 10^{10}$ н/м²; $E^* = 2,06 \cdot 10^{10}$ н/м²; $\delta = \frac{b}{r_1}$; $\gamma = \frac{h^*}{h} = 1$; $\nu = 0,3$; $\kappa = 2,08$. Расчеты произведены на ЭВМ «Минск-22».

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дис. Львовский ун-т, Львов, 1970.
2. Космодамианский А. С. Многосвязные пластинки. Изд-во Донецкого ун-та, Донецк, 1969.
3. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел, 2. Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 1965.

Львовский государственный университет

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ДИФфуЗИОННОЕ НАСЫЩЕНИЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА С ДВУСТОРОННИМ ПОКРЫТИЕМ

Д. В. Иващук, В. И. Лах, П. Р. Шевчук

Во многих случаях для обеспечения стабильности работы точных измерительных приборов, работающих в агрессивных средах при повышенных давлениях и температурах, их помещают в защитные устройства, которые можно моделировать полым цилиндром. Для придания защитной арматуре необходимого комплекса свойств очень часто на поверхность ее наносятся специальные покрытия, которые, однако, существенно усложняют расчет диффузионной проницаемости и напряженного состояния таких механических систем.

1. Определение поля концентрации. Рассмотрим длинный полый цилиндр, на внутренней ($r = R_1$) и внешней ($r = R_2$) поверхностях которого имеются тонкие покрытия постоянной толщины 2δ с отличными физико-механическими характеристиками. Цилиндр омывается изнутри и извне средами с давлениями q_1 и q_2 и концентрациями c_1 и c_2 вещества, которое может диффундировать в материал цилиндра через покрытия. Начиная с момента насыщения, распределение концентрации диффундирующего вещества в материале цилиндра описывается решением дифференциального уравнения

$$\frac{\omega}{\lambda} \cdot \frac{\partial c}{\partial \tau_1} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) c \quad (1)$$

при краевых условиях [4]:

$$c = 0 \text{ при } \tau_1 = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mu_0''(d_2c_2 - c) - \lambda \left(1 + \frac{\mu_0''}{h''}\right) \frac{\partial c}{\partial r} &= \omega'' \frac{\partial c}{\partial \tau_1} \text{ при } r = R_2, \\ \mu_0'(d_1c_1 - c) + \lambda \left(1 + \frac{\mu_0'}{h'}\right) \frac{\partial c}{\partial r} &= \omega' \frac{\partial c}{\partial \tau_1} \text{ при } r = R_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где $d_1 = d^{(1)}/d$ и $d_2 = d^{(2)}/d$ — величины, характеризующие эффект адсорбции; $d^{(1)}$, $d^{(2)}$, d — коэффициенты, описывающие изменение химического потенциала с изменением концентрации диффундирующего вещества в средах и цилиндре соответственно; μ_0' , μ_0'' — коэффициенты массоотдачи внутреннего и внешнего покрытий; $\omega' = 2\delta\omega_0'$, $\omega'' = 2\delta\omega_0''$ — приведенные массоемкости покрытий; $h' = (2\delta)^{-1}\lambda_0'$, $h'' = (2\delta)^{-1}\lambda_0''$ — их массопроницаемости; λ_0' , λ_0'' , ω_0' , ω_0'' — удельные коэффициенты массопроводности и массоемкости покрытий.

Решение уравнения (1) с учетом выражений (2) и (3) в трансформантах Лапласа можно представить в виде

$$c^* = s^{-1}F_0(p\rho)F_0^{-1}, \quad (4)$$

где c^* — трансформанта Лапласа концентрации c ; s — параметр преобразования Лапласа, а

$$F_1(p\rho) = n_2d_2c_2U_k(p\rho) + n_1d_1c_1V_k(p\rho), \quad F(p) = (n_2 - p^2)U_0(p) - m_2pU_1(p).$$

Функции $U_k(x)$ и $V_k(x)$ ($k = 0, 1$) имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} U_k(x) &= \left[n_2Y_1(p\rho_1) + \frac{n_1 - p^2}{p} Y_0(p\rho_1) \right] J_k(x) - \\ &\quad - \left[n_2J_1(p\rho_1) + \frac{n_1 - p^2}{p} J_0(p\rho_1) \right] Y_k(x), \\ V_k(x) &= \left[m_2Y_1(p) - \frac{m_1 - p^2}{p} Y_0(p) \right] J_k(x) - \left[m_2J_1(p) - \frac{m_1 - p^2}{p} J_0(p) \right] Y_k(x). \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $p = i\sqrt{s}$, $\rho = r/R_2$, $\rho_1 = R_1/R_2$,

$$n_1 = \frac{\mu_0'\omega R_2^2}{\lambda\omega'}, \quad n_2 = \frac{\mu_0''\omega R_2^2}{\lambda\omega''}, \quad m_1 = \left(1 + \frac{\mu_0'}{h'}\right) \frac{\omega R_2}{\omega'}, \quad m_2 = \left(1 + \frac{\mu_0''}{h''}\right) \frac{\omega R_2}{\omega''}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к выражению (4), для определения распределения концентрации диффундирующего вещества в материале цилиндра получаем

$$\begin{aligned} c &= d_2c_2 + \frac{(d_1c_1 - d_2c_2)(m_2 - n_2 \ln \rho) n_1 \rho_1}{n_2 m_2 + n_1 \rho_1 (m_2 - n_2 \ln \rho_1)} + \\ &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{-1} F_0(p_n \rho) \left[\frac{d}{d\rho} F(p) \right]_{p=p_n}^{-1} e^{-\rho_n^2 \tau}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tau = \tau_1 \lambda / \omega R_2^2$ — безразмерное время, а

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} F(p) &= -(2 + m_2) p U_0(p) - (n_2 - p^2) U_1(p) + \\ &\quad + \left[m_1 p \rho_1 - \frac{n_1 + p^2}{p} \right] V_0(p\rho_1) - [m_1 + (n_1 - p^2) \rho_1] V_1(p\rho_1). \end{aligned}$$

причем ρ_n — корни уравнения $F(p) = 0$.

В случае установившегося состояния ($\tau \rightarrow \infty$) концентрация диффундирующего вещества в цилиндре определяется выражением

$$\bar{c} = \frac{c}{d_2 c_2} = 1 + \frac{\left(\frac{d_1 c_1}{d_2 c_2} - 1\right) (m_2 - n_2 \ln \rho) n_1 \rho_1}{n_2 m_1 + n_1 \rho_1 (m_2 - n_2 \ln \rho)},$$

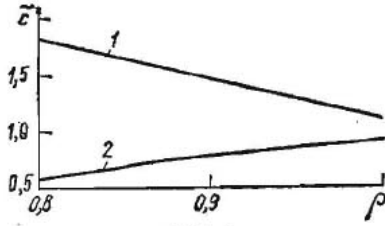


Рис. 1.

которым в этом случае, в зависимости от определяющих параметров омывающих сред и соотношений физико-механических характеристик материалов покрытий и цилиндра, можно определять диффузионные потоки через поверхности цилиндра. На рис. 1 приведены кривые распределения концентрации диффундирующего вещества в области цилиндра при различных соотношениях концентраций диффундирующего вещества

в смывающих средах (кривая 1 соответствует отношению $\frac{c_1}{c_2} = 2$, кривая 2 — $\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2}$).

Для малых значений времени распределение диффундирующего вещества в цилиндре описывается выражением

$$c = \frac{n_2 d_2 c_2}{2b^3 \sqrt{\rho}} \left\{ [2(a_1 + b)(1 + b - b\rho) + a_1(1 - \rho)^2 b^2 + 2b^2 a_1 \tau] \operatorname{erfc} \frac{1 - \rho}{2\sqrt{\tau}} - 2(a_1 + b) e^{b(1-\rho) + b^2 \tau} \operatorname{erfc} \left(\frac{1 - \rho}{2\sqrt{\tau}} - b\sqrt{\tau} \right) - 2b[2(a_1 + b) + a_1 b(1 - \rho)] \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{(1-\rho)^2}{4\tau}} \right\} + \frac{n_1 d_1 c_1 \sqrt{\rho_1}}{2b^3 \sqrt{\rho}} \left\{ [2(a_2 + b)(1 + b\rho - b\rho_1) + a_2(\rho - \rho_1)^2 b^2 + 2b^2 a_2 \tau] \operatorname{erfc} \frac{\rho - \rho_1}{2\sqrt{\tau}} - 2(a_2 + b) e^{b(\rho - \rho_1) + b^2 \tau} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc} \left(\frac{\rho - \rho_1}{2\sqrt{\tau}} + b\sqrt{\tau} \right) - 2b[2(a_2 + b) + a_2 b(\rho - \rho_1)] \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{(\rho_1 - \rho)^2}{4\tau}} \right\},$$

где

$$a_k = m_k - \frac{\rho - \rho_1}{8\rho_1 \rho}, \quad b = m_1 + m_2 + \frac{\rho_1 - 1}{8\rho_1}.$$

Это выражение при подсчетах распределения диффундирующего вещества вблизи границ существенно упрощается: при $\rho = 1$ выражение во второй фигурной скобке мало по сравнению с выражением в первой, а при $\rho = \rho_1$ выражением в первой фигурной скобке можно пренебречь.

2. Определение напряженного состояния. Для определения напряженного состояния компоненты вектора перемещения \bar{u} представим в форме Папковича—Нейбера [2]:

$$u_\rho = \psi + \frac{1}{4(1 + \nu)} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\chi - \rho\psi - z\psi_2), \\ u_z = \psi_2 + \frac{1}{4(1 + \nu)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\chi - \rho\psi - z\psi_2), \quad (6)$$

где ψ_2 — гармоническая функция, а функции ψ и χ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\psi}{\rho^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \rho} = 4(1 + \nu)\beta c, \quad (7)$$

причем β — линейный коэффициент концентрационного расширения, а ν — коэффициент Пуассона для материала цилиндра.

Функцию ψ_2 и решения уравнений (7) в трансформантах Лапласа выбираем в виде

$$\psi_2^* = B\alpha, \quad \psi^*(\rho, s) = B_1\rho + B_2 \frac{1}{\rho}, \quad \chi^*(\rho, s) = 4(1+\nu)\beta s^{-2}F_0(\rho\rho)F^{-1}(\rho),$$

где $\alpha = z/R_2$ — безразмерная координата.

Компоненты напряжений σ_{kj} определяются уравнениями состояния

$$\sigma_{kj} = 2G \left(\varepsilon_{kj} + \frac{\nu}{1-2\nu} e\delta_{kj} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \beta c\delta_{kj} \right),$$

где G — модуль сдвига; ε_{kj} — компоненты деформации; $e = \varepsilon_{kk}$, δ_{kj} — символ Кронекера.

Удовлетворяя обобщенным условиям механического сопряжения контактирующих сред [5], которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta E''}{|1-(\nu'')^2|R_2} \left[\nu'' \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + u_\rho - (1+\nu'')\beta''\Phi_1 \right] &= \frac{1}{2} g_n \text{ при } \rho = 1, \\ \frac{\delta E'}{|1-(\nu')^2|R_1} \left[\nu' \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + u_\rho - (1+\nu')\beta'\Phi_1 \right] &= \frac{1}{2} g_n \text{ при } \rho = \rho_1, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Phi = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} cd\gamma$, $g_n = q_n - \sigma_{\rho\rho}$,

и условию равновесия произвольного поперечного сечения цилиндра

$$R_2^2 \int_0^{2\pi} \int_{\rho_1}^1 \sigma_{\alpha\alpha} \rho d\rho d\varphi = 2\pi (R_1 N_1' + R_2 N_1''),$$

для компонент напряжений в трансформантах Лапласа получаем выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^* &= 2G \left[\frac{B_1}{2(1-\nu)} - \frac{B_2}{\rho^2} + \frac{\nu B}{2(1-\nu)} + \frac{(1+\nu)\beta}{(1-\nu)\rho} \rho^{-3} F_1(\rho\rho) F^{-1}(\rho) \right], \\ \sigma_{zz}^* &= 2G \left[\frac{1}{2} B - \frac{\nu B_1}{1-\nu} + \frac{(1+\nu)\beta}{1-\nu} \rho^{-2} F_0(\rho\rho) F^{-1}(\rho) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* &= 2G \left\{ \frac{B_1}{2(1-\nu)} + \frac{B_2}{\rho^2} + \frac{\nu B}{2(1-\nu)} - \frac{(1+\nu)\beta}{(1-\nu)\rho} \rho^{-2} [\rho^{-1} F_1(\rho\rho) - \right. \\ &\quad \left. - F_0(\rho\rho)] F^{-1}(\rho) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B &= \{A_{23}E_1 + B_{32}E_1^* + C_{23}(l_5 d_1 c_1 + l_6 d_2 c_2) + [(A_{23}E_2 + C_{23}l_1) \rho^{-1} F_1(\rho) + \\ &\quad + (C_{23}l_4 - A_{23}E_3) F_0(\rho) + (B_{32}E_2^* + C_{23}l_2) \rho^{-1} F_1(\rho\rho_1) + (C_{23}l_3 - \\ &\quad - B_{32}E_3^*) F_0(\rho\rho_1)] F^{-1}(\rho)\} \rho^{-2} D^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \{B_{13}E_1^* + A_{31}E_1 + C_{31}(l_5 d_1 c_1 + l_6 d_2 c_2) + \\ &\quad + [(C_{31}l_1 - B_{13}E_3^*) F_0(\rho_1\rho) + (B_{13}E_2^* + C_{31}l_2) \rho^{-1} F_1(\rho\rho_1) + \\ &\quad + (A_{31}E_2 + C_{31}l_4) \rho^{-1} F_1(\rho) + (C_{31}l_4 - A_{31}E_3) F_0(\rho)] F^{-1}(\rho)\} \rho^{-2} D^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \{A_{12}E_1 + B_{21}E_1^* + C_{12}(l_5 d_1 c_1 + l_6 d_2 c_2) + \\ &\quad + [(C_{12}l_1 + A_{12}E_2) \rho^{-1} F_1(\rho) + (C_{12}l_2 + B_{21}E_2^*) \rho^{-1} F_1(\rho\rho_1) + \\ &\quad + (C_{12}l_3 - B_{21}E_3^*) F_0(\rho\rho_1) + (C_{12}l_4 - A_{12}E_3) F_0(\rho)] F^{-1}(\rho)\} \rho^{-2} D^{-1}; \end{aligned}$$

$$A_{kj} = G_k^* L_j - L_k G_j^*, \quad B_{kj} = G_k L_j - L_k G_j, \quad C_{kj} = G_k G_j^* - G_k^* G_j,$$

$$G_1 = \frac{(1-2\nu)\nu''\delta E''}{(1-\nu)[1-(\nu'')^2]R_2} + \frac{\nu G}{1-\nu}, \quad G_2 = \frac{(1-2\nu)\delta E''}{(1-\nu)[1-(\nu')^2]R_2} + \frac{G}{1-\nu},$$

$$\begin{aligned}
G_3 &= \frac{2\delta E^*}{[1-(v')^2]R_2} - 2G, \quad E_1 = -\frac{\beta''\mu_0''\delta E^*}{(1-v'')(\mu_0''+h'')R_2} - q_2, \\
E_2 &= \frac{2\beta(1+v)\delta E^*}{(1-v)[1-(v'')^2]R_2} - \frac{2\beta(1+v)G}{1-v}, \quad E_3 = \frac{\beta''(\mu_0''+2h'')\delta E^*}{(1-v'')(\mu_0''+h'')R_2}, \\
G_1^* &= \frac{(1-2v)v'\delta E^*}{(1-v)[1-(v')^2]R_1} + \frac{vG}{1-v}, \quad G_2^* = \frac{(1-2v)\rho_1\delta E^*}{(1-v)[1-(v')^2]R_1} + \frac{G}{1-v}, \\
G_3^* &= \frac{2\delta E^*}{[1-(v')^2]\rho_1R_1} - \frac{2G}{\rho_1^2}, \quad E_1^* = -\frac{\beta'\mu_0'\delta E^*}{(1-v')(\mu_0'+h')R_1} - q_1, \\
E_2^* &= \frac{2\beta(1+v)\delta E^*}{(1-v)[1-(v')^2]R_1} - \frac{2\beta(1+v)G}{(1-v)\rho_1}, \quad E_3^* = \frac{\beta(\mu_0'+2h')\delta E^*}{(1-v')(\mu_0'+h')R_1}, \\
L_1 &= \frac{1-\rho_1^2}{2}, \quad L_2 = \frac{(1-\rho_1)^2v}{1-v} - \frac{(1-2v)[(1+v')R_1G_1^* + (1+v'')R_2G_2^*]}{2(1-v)R_2^2G}, \\
L_3 &= \frac{(1-v')G_1^*}{R_1G} + \frac{(1-v'')G_2^*}{R_2G}, \quad l_1 = \frac{(1+v)(1-v'')\beta G_1^*}{(1-v)R_2G} - \frac{2(1+v)\beta}{1-v}, \\
l_2 &= \frac{(1+v)(1-v')\beta G_1^*}{(1-v)R_2G} + \frac{2(1+v)\beta\rho_1}{1-v}, \\
l_3 &= \frac{R_1G_1^*}{R_2^2G} \left[\frac{\beta'(1+v')(\mu_0'+2h')}{2(\mu_0'+h')} - \frac{(1+v)\beta}{1-v} \right], \\
l_4 &= \frac{G_1^*}{R_2G} \left[\frac{\beta''(1+v'')(\mu_0''+2h'')}{2(\mu_0''+h'')} - \frac{(1+v)\beta}{1-v} \right], \\
l_5 &= \frac{\beta'(1+v')\mu_0'}{2(\mu_0'+h')}, \quad l_6 = \frac{\beta''(1+v'')\mu_0''}{2(\mu_0''+h'')}, \\
D &= (G_1L_3 - L_1G_3)G_2^* + (L_1G_3^* - G_1^*L_3)G_2 + (G_1^*G_3 - G_3^*G_1)L_2.
\end{aligned}$$

Оригиналы напряжений $\sigma_{\rho\rho}$, σ_{zz} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ получены с помощью обобщенной теоремы разложения [3]. Ввиду громоздкости они здесь не приведены.

В случае установившегося состояния ($\tau \rightarrow \infty$) выражения для компонент напряжений упрощаются и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho} &= 2G \left[\frac{\tilde{B}_1}{2(1-v)} + \frac{v\tilde{B}}{2(1-v)} - \frac{\tilde{B}_2}{\rho^2} \right], \\
\sigma_{zz} &= 2G \left\{ \frac{1}{2}\tilde{B}_2 + \frac{v\tilde{B}_1}{1-v} + \frac{(1+v)\beta}{1-v} \left[d_2c_2 + \frac{(d_1c_1 - d_2c_2)n_1\rho_1(m_2 - n_2 \ln \rho)}{n_2m_1 + n_1\rho_1(m_2 - n_2 \ln \rho_1)} \right] \right\}, \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= 2G \left\{ \frac{\tilde{B}_1}{2(1-v)} + \frac{v\tilde{B}}{2(1-v)} + \frac{\tilde{B}_2}{\rho^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1+v)\beta}{1-v} \left[d_2c_2 + \frac{(d_1c_1 - d_2c_2)n_1\rho_1(m_2 - n_2 \ln \rho)}{n_2m_1 + n_1\rho_1(m_2 - n_2 \ln \rho_1)} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Величины \tilde{B}_1 , \tilde{B}_2 , \tilde{B} определяются из выражений

$$\tilde{B}_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sB_1, \quad \tilde{B}_2 = \lim_{s \rightarrow 0} sB_2, \quad \tilde{B} = \lim_{s \rightarrow 0} sB.$$

На рис. 2 приведены кривые распределения безразмерного напряжения $\tilde{\sigma} = \sigma/Gd_2c_2\beta$ по радиусу для одинаковых покрытий при отсутствии давлений ($q_1 = q_2 = 0$). Как следует из рис. 2, при заданном отношении концентрации диффундирующего вещества в омывающих средах напряженное

состояние качественно меняется в зависимости от соотношения линейных коэффициентов концентрационного расширения материала покрытия и цилиндра (для $c_1/c_2 = 2$: кривая 1 получена при $\beta_1/\beta_2 = \frac{1}{2}$, кривая 2 — при $\beta_1/\beta_2 = 2$; для $c_1/c_2 = \frac{1}{2}$: кривая 3 получена при $\beta_1/\beta_2 = \frac{1}{2}$, кривая 4 — при $\beta_1/\beta_2 = 2$).

При заданном соотношении линейных коэффициентов концентрационного расширения материалов покрытия и цилиндра напряженное состояние также существенно меняется в зависимости от соотношений концентраций диффундирующего вещества в омывающих средах (см. рис. 2).

Выражения для напряжений отрыва для малых значений времени соответственно при $\rho = \rho_1$ и $\rho = 1$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} = & 2G \left\{ \frac{B_1^*}{2(1-\nu)} - B_2^* + \right. \\ & + \frac{\nu B^*}{2(1-\nu)} - \frac{(1+\nu)\beta}{1-\nu} n_k d_k c_k \times \\ & \times \left[\frac{b_k - b}{b^4} (e^{b^2 \tau} \operatorname{erfc} b \sqrt{\tau} - 1) - \frac{b_k - b}{b^2} \tau + \right. \\ & \left. \left. + \frac{2(b_k - b)}{b^3} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{b_k}{b} \tau \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

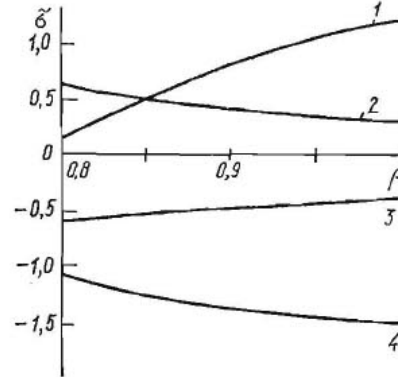


Рис. 2.

где

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = \sigma_{\rho\rho|\rho=1}, \quad \sigma_{\rho\rho}^{(2)} = \sigma_{\rho\rho|\rho=\rho_1}, \quad b_2 = \frac{1}{8\rho_1} + \frac{3}{8\rho} - m_1, \quad b_1 = m_2 + \frac{1}{8} + \frac{3}{8\rho}.$$

Величины B_1^* , B_2^* , B^* легко получить из формул для B_1 , B_2 и B , если в последние вместо выражений $\rho^{-3} F_1(\rho\rho_1) F^{-1}(\rho)$, $\rho^{-3} F_1(\rho) F^{-1}(\rho)$, $\rho^{-2} F_0 \times \times (\rho\rho_1) F^{-1}(\rho)$, $\rho^{-2} F_0(\rho) F^{-1}(\rho)$ подставить их оригиналы для малых значений времени

$$\tilde{f}_1(\tau), \quad \tilde{f}_2(\tau), \quad f_1(\tau) \quad \text{и} \quad f_2(\tau), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k(\tau) = & n_k d_k c_k \left\{ \frac{b_k - i^{2k+2} b}{b^4} (e^{b^2 \tau} \operatorname{erfc} b \sqrt{\tau} - 1) - \right. \\ & \left. - \frac{b_k - i^{2k+2} b}{b^2} (\tau - 2b^{-1}) + \frac{4}{3} \frac{b_k}{b} \tau \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \right\}, \end{aligned}$$

$$f_k(\tau) = n_k d_k c_k \left\{ - \frac{a_k + b}{b^3} \left[e^{b^2 \tau} \operatorname{erfc} b \sqrt{\tau} - 1 + 2b \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \right] + \frac{a_k \tau}{b} \right\}.$$

Для определения усилий, развивающихся в покрытиях в процессе диффузионного насыщения, пользуемся известными соотношениями между усилиями и деформациями [5]. Подставляя в указанные соотношения значения деформаций с учетом первого из условий (8), в трансформантах Лапласа находим

$$\begin{aligned} N_2^* = & G_1^* \left\{ \frac{(1+\nu^*) (1-2\nu) B_1}{2(1-\nu)} + (1-\nu^*) B_2 + \beta_0^* (1+\nu^*) \frac{\mu_0^* d_1 c_1}{2(\mu_0^* + h^*) \rho^2} - \right. \\ & - \frac{(1-\nu_0^*) (1+\nu) \beta}{1-\nu} \rho^{-3} F_1(\rho) F^{-1}(\rho) - \\ & \left. - \left[\frac{\nu^* (1+\nu) \beta}{1-\nu} - \frac{\beta_0^* (1+\nu^*) (\mu_0^* + 2h^*)}{2(\mu_0^* + h^*)} \right] \rho^{-2} F_0(\rho) F^{-1}(\rho) \right\}, \end{aligned}$$

$$N'_2 = G'_1 \left\{ \frac{(1 + \nu')(1 - 2\nu) B_1}{2(1 - \nu)} + \frac{(1 - \nu') B_2}{\rho_1^2} + \beta'_0 (1 + \nu') \frac{\mu'_0 d_2 c_2}{2(\mu'_0 + h')} \rho^{-2} - \right. \\ \left. - \frac{(1 - \nu')(1 + \nu) \beta}{(1 - \nu) \rho_1} \rho^{-3} F_1(\rho \rho_1) F^{-1}(\rho) - \right. \\ \left. - \left[\frac{\nu'(1 + \nu) \beta}{1 - \nu} - \frac{\beta'_0 (1 + \nu') (\mu'_0 + 2h')}{2(\mu'_0 + h')} \right] \rho^{-2} F_0(\rho \rho_1) F^{-1}(\rho) \right\}.$$

Оригиналы усилий получены с помощью обобщенной теоремы разложения [3] и ввиду громоздкости здесь не приведены. Для малых значений времени усилия легко получить, пользуясь выражением (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
2. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. «Высшая школа», М., 1967.
4. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р. — ФХММ, 1967, 5.
5. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р. — В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 7. «Наукова думка», К., 1967.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРА, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ ДИФFUЗИОННОМ НАСЫЩЕНИИ

Р. Н. Швец, Я. И. Дасюк

При диффузионном насыщении поверхностных слоев конструкционных материалов в диффузионной зоне образуются новые фазы, плотность которых может существенно отличаться от плотности исходного материала. Перераспределение компонентов насыщения в поверхностных слоях материала может привести к появлению напряженного состояния, достаточного для разрушения изделия. Такое происхождение, например, имеют поверхностные трещины при диффузии лития в углеродистые стали [1]. В цитированной работе сделана попытка оценить напряженное состояние цилиндра расчетным путем, когда распределение насыщающего компонента можно представить в виде трапецеидального импульса, не решая при этом задачи диффузии.

В данной статье определяются концентрационные поля и проводится расчет напряженного состояния для образцов цилиндрической формы при диффузионном насыщении.

Диффузионное насыщение цилиндра. Пусть бесконечный сплошной цилиндр радиуса R , материал которого в начальный момент времени представляет собой двухкомпонентный твердый раствор с постоянной концентрацией первого элемента, равной c_1^0 , насыщается другим элементом. Это довольно часто встречается на практике при насыщении углеродистых сталей металлическими элементами. Решение задачи о нахождении концентрационных полей в полупространстве приводится в работе [8].

Задача об определении концентрационных полей для цилиндра с учетом влияния деформаций на перераспределение диффундирующих элементов при изотермическом процессе, в пренебрежении механическими колебаниями, запишется в таком виде [5]:

$$\text{исходные уравнения} \\ \frac{\partial c_1}{\partial t} = D_{11} \Delta c_1 + D_{12} \Delta c_2 + D_{1,e} \Delta e, \quad \frac{\partial c_2}{\partial t} = D_{21} \Delta c_1 + D_{22} \Delta c_2 + D_{2,e} \Delta e, \quad (1)$$

$$G \Delta u_\alpha + \left(K^{T,c} + \frac{1}{3} G \right) \nabla_i \nabla_\alpha u_\alpha - K^{T,c} \beta_1^{\sigma,T} \nabla_i c_1 - K^{T,c} \beta_2^{\sigma,T} \nabla_i c_2 = 0; \quad (2)$$