ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Дацишин А. П., Савчук М. П.— ПММ, 1973, 37, 2.
3. Кіт Г. С.— ДАН УРСР. Сер. А, 1969, 5.
4. Кит Г. С., Дорош Н. А.— В кн.: Концентрация напряжений, 3. «Наукова думка», К., 1971.
5. Кит Г. С., Хай М. В.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, 5.
6. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. ОНТИ, М., 1937.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
8. Прусов А. И. Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1972.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в октябре 197э г.

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНКИ С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ, В КОТОРЫЕ ВПРЕССОВАНЫ ЗАМКНУТЫЕ СТЕРЖНИ

Т. Л. Мартынович, М. К. Зварич

Рассмотрим изотропную пластинку, срединная плоскость которой занимает бесконечную область S, ослабленную двумя одинаковыми отверстиями L_1 и L_2, в которые впрессованы замкнутые упругие стержни. Расстояние между центрами отверстий примем равным $2l$. Систему координат расположим так, как это показано на рис. 2. Будем считать, что на бесконечности задано однородное напряженное состояние, а в пластинке действуют сосредоточенные силы P_i, расположенные симметрично относительно координатных осей Ox и Oy. Трением на линии контакта пренебрегаем. Предполагается, что контакт осуществляется вдоль контуров L_1, L_2. Поперечное сечение стержня может быть произвольной формы, симметричной относительно срединной плоскости пластинки. К внутренним контурам колец приложены нормальные напряжения N^* постоянной интенсивности. Напряженно-деформированное состояние колец описывается теорией тонких криволинейных стержней. На линиях контакта L_1 и L_2 заданы, как функции дуги, нормальные величины скачков векторов перемещений $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \varepsilon(t)$. Учитывая силовую и геометрическую симметрию, граничным условиям задачи достаточно удовлетворить на правом контуре (на левом контуре они выполняются автоматически).

Определение напряженного состояния в контактирующих телах сводится к нахождению потенциалов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, комплексного переменного $z = x + iy$ и компонент деформации стержня e_0 и θ_b, которые удовлетворяют граничным условиям:

$$\int\limits_{L_1} F(t)\,\mathrm{Re}\,d\,\{i\overline{\dot{t}}[\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]\} = 2\mu \int\limits_{L_1} F(t)\,d\,[u_{1n} + \varepsilon(t)];$$

$$\int\limits_{L_1} \overline{F(t)}\,d\,[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] = \int\limits_{L_1} N^{(t)}\overline{F(t)}\,dt; \tag{1}$$

$$\int\limits_{L_1} F(t)\,d\,[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] = \int\limits_{L_1} N^{(t)}F(t)\,dt,$$

где $F(z)$ — произвольная функция, голоморфная в области, занятой пластинкой; t — аффикс точки контура L_1; $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$.

Нормальная составляющая перемещения u_{1n} точек крайнего волокна стержня [1]

$$u_{1n} = \mathrm{Re}\left\{i\bar{t}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + \bar{t}(r_1 - r_0)\frac{d\theta_b}{dt} + i\theta_b\right]dt + c\bar{t}\right\} \tag{2}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2u_{1n}}{ds_1^2} + \frac{1}{r_1^2}u_{1n} = \frac{r_0}{r_1^2}e_0 - \frac{r_0}{r_1}\frac{d\theta_b}{ds_1}, \tag{3}$$

где e_0 — относительное удлинение нулевой (для чистого изгиба) линии L_0; θ_b — угол поворота нормального сечения кольца; c — постоянная интегрирования.

Уравнения равновесия элемента кольца, учитывая $T^{(i)} = 0$, принимают вид

$$N^{(i)} = \frac{1}{2hr_1}\left(V_\tau + r_1^2\frac{d^2V_\tau}{ds_1^2}\right) + \frac{h^*}{h}\cdot\frac{r_2}{r_1}N^*; \quad \frac{dL_b}{ds_1} = -r_0\frac{dV_\tau}{ds_1}. \tag{4}$$

Закон Гука для криволинейного стержня при малой деформации запишем в виде [1]

$$V_\tau = ge_0; \quad L_b = g\eta_c r_1\frac{d\theta_b}{ds_1}. \tag{5}$$

Нормальное напряжение в сечении кольца определяем по формуле

$$\sigma = E^*\left|\frac{r_0}{r}e_0 + (r - r_0)\frac{d\theta_b}{ds_1}\right|, \tag{6}$$

где r — радиус кривизны произвольного волокна кольца.

В формулах (2) — (6) использованы обозначения работы [1].

Граничные условия (1), с учетом уравнений (4), служат для определения компонент деформации стержня e_0, θ_b и комплексных потенциалов $\varphi(z)$, $\psi(z)$.

Величины e_0, θ_b и u_{1n} на контуре γ_1 правого отверстия представим в виде

$$e_0 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\sigma^k + \sigma^{-k}); \quad \theta_b = i\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^*(\sigma^k - \sigma^{-k});$$
$$u_{1n} = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(\sigma^k + \sigma^{-k}). \tag{7}$$

Учитывая выражение (3), нормальную составляющую контактного напряжения записываем в виде

$$N^{(i)} = \frac{g}{2hr_1r_0}\left\{\gamma_0 + \frac{1}{1 + r_0/\eta_c}\sum_{k=1}^{\infty}(1 - k^2)^2\gamma_k(\sigma^k + \sigma^{-k})\right\} + \frac{h^*}{h}\cdot\frac{r_2}{r_1}N^*. \tag{8}$$

Комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, согласно [2, 3], представим так:

$$\varphi(z) = \varphi_*(z) + \sum_{k=1}^{\infty}a_kr_1^k\{(z - l)^{-k} + (-1)^{k+1}(z + l)^{-k}\};$$

$$\psi(z) = \psi_*(z) + \sum_{k=1}^{\infty}b_kr_1^k\{(z - l)^{-k} + (-1)^{k+1}(z + l)^{-k}\}, \tag{9}$$

где $\varphi_*(z)$ и $\psi_*(z)$ — функции, зависящие от вида нагружения на пластинку.

На контуре правого отверстия $t = l + r_1\sigma$ произвольную функцию представим в виде

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty}E_n\sigma^{-n}. \tag{10}$$

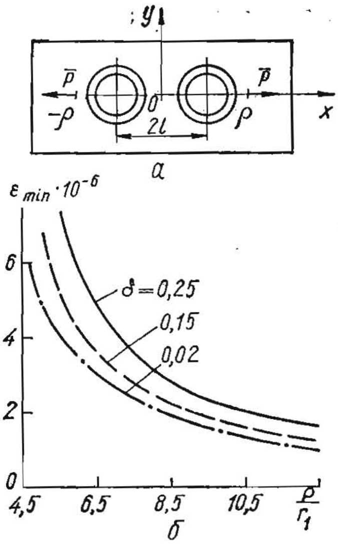

Рис. 1.

Внесем разложения (7), (9) и (10) в граничные условия (1), учитывая (3), (4) и (8), и выполним интегрирование вдоль контура γ_1, полагая при этом все E_p, кроме E_n, равными нулю; в результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений искомых функций

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn}^{(1)}\gamma_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(1)}a_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{kn}^{(1)}b_k = \varepsilon_n + P_n^{(1)};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn}^{(2)}\gamma_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(2)}a_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{kn}^{(2)}b_k = P_n^{(2)}; \qquad (11)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn}^{(3)}\gamma_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(3)}a_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{kn}^{(3)}b_k = P_n^{(3)},$$

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$$

где

$$a_{kn}^{(2)} = \frac{g}{2hr_0}\,\frac{(1-k^2)^2}{n\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)}\,\delta_{n-k};\quad a_{kn}^{(3)} = \frac{g}{2hr_0}\,\frac{(1-k^2)^2}{n\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)}\,\delta_{k-n};$$

$$a_{0n}^{(3)} = \frac{g}{2hr_0}\,\delta_{-n};\quad a_{kn}^{(1)} = -4\mu\delta_{k-n};\quad \varepsilon_n = -\frac{2\mu i}{\pi}\int\limits_{\gamma_1} \varepsilon(\sigma)\,\sigma^{-n}d\sigma;$$

$$c_{kn}^{(1)} = (\varkappa + k)\,\delta_{k-n+1} + \frac{k}{2\varepsilon_1}\,\delta_{k-n} + (\varkappa - n)\,H_{k,n} + (\varkappa + n - 2)\,H_{k,2-n}\,\delta^*_{2-n} -$$

$$-\frac{n-1}{2\varepsilon_1}\,H_{k,n-1};$$

$$d_{kn}^{(1)} = -\delta_{k-n-1} - \delta_{-k-n+1} - H_{k,n-2}\,\delta^*_{n-2};\quad d_{kn}^{(2)} = H_{k,n};$$

$$c_{kn}^{(2)} = \delta_{n-k-1} + \frac{n+1}{2\varepsilon_1}\,H_{k,n+1} + (n+2)\,H_{k,n+2}; \qquad (12)$$

$$c_{kn}^{(3)} = k\left(\delta_{k-n+1} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\,\delta_{k-n}\right) - H_{k,n} - H_{k,1}\delta_{-n};\quad d_{kn}^{(3)} = -\delta_{k-n-1};$$

$$H_{k,m} = (-1)^{k+m+1}C_{k+m-1}^{m}\,\varepsilon_1^{k+m};\quad \varepsilon_1 = \frac{r_1}{2l};$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i = -1, \\ 0, & i \neq -1; \end{cases}\qquad \delta_j^* = \begin{cases} 1, & j \geqslant 0, \\ 0, & j < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим некоторые конкретные случаи загружения пластинки.

1. В пластинке приложены сосредоточенные силы.

Пусть в пластинке приложены сосредоточенные силы P, как это показано на рис. 1, *а*. Тогда

$$\varphi_*(z) = -P_*\ln\frac{z-\rho}{z+\rho};\quad P_* = \frac{P}{4\pi h\,(1+\varkappa)};$$

$$\psi_*(z) = \varkappa P_*\ln\frac{z-\rho}{z+\rho} + 2P_*\rho\,\frac{z}{z^2-\rho^2}.$$

Выражения для $P_n^{(1)}$, $P_n^{(2)}$ и $P_n^{(3)}$ принимают вид:

$$P_n^{(1)} = \frac{P_*}{\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\sigma^{-n}\mathrm{Re}\left\{\sigma^{-1}\left[\varkappa\ln\frac{(\sigma-\zeta_1)(1-\zeta_1\sigma)}{(\sigma-\zeta_2)(1-\zeta_2\sigma)} - \frac{(\zeta_2-\zeta_1)(\sigma-\sigma^3)}{(1-\zeta_2\sigma)(1-\zeta_1\sigma)}\right]\right\}d\sigma;$$

$$P_n^{(2)} = -\frac{P_*}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \sigma^{n-1}\left\{\varkappa \ln\frac{1-\zeta_1\sigma}{1-\zeta_2\sigma} - \frac{(\zeta_2-\zeta_1)(\sigma-\sigma^3)}{(1-\zeta_1\sigma)(1-\zeta_2\sigma)}\right\} d\sigma;$$

$$P_n^{(3)} = -\frac{P_*}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \sigma^{-n-1}\left\{\ln\frac{\sigma-\zeta_1}{\sigma-\zeta_2} + \frac{(\zeta_1-\zeta_2)\sigma^3}{(1-\zeta_1\sigma)(1-\zeta_2\sigma)}\right\} d\sigma;$$

$$\zeta_1 = \frac{\rho - l}{r_1}; \quad \zeta_2 = -\frac{\rho + l}{r_1}.$$

Напряжения	δ	$\theta = 0$			$\theta = \frac{\pi}{2}$			$\theta = \pi$		
		$\varepsilon_1=0{,}25$	$\varepsilon_1=\frac{1}{3}$	$\varepsilon_1=0{,}4$	$\varepsilon_1=0{,}25$	$\varepsilon_1=\frac{1}{3}$	$\varepsilon_1=0{,}4$	$\varepsilon_1=0{,}25$	$\varepsilon_1=\frac{1}{3}$	$\varepsilon_1=0{,}4$
σ_θ/N^*	0,02	1,082	1,171	1,266	0,768	0,690	0,627	1,319	1,762	2,473
	0,15	0,707	0,761	0,813	0,502	0,447	0,401	0,859	1,138	1,579
	0,25	0,513	0,550	0,584	0,364	0,322	0,285	,614	0,806	1,110
σ_θ^*/N^*		1,158	1,255	1,359	0,821	0,739	0,673	1,411	1,888	2,656
$-\sigma_\rho/N^*$	0,02	0,935	0,933	0,931	0,935	0,933	0,931	0,935	0,934	0,931
	0,15	0,611	0,607	0,598	0,611	0,607	0,599	0,615	0,616	0,616
	0,25	0,444	0,439	0,431	0,443	0,440	0,434	0,456	0,470	0,491
$\sigma^{(1)}/N^*$	0,02	2,241	2,298	2,402	2,256	2,319	2,429	2,224	2,258	2,336
	0,15	1,434	1,467	1,484	1,516	1,564	1,628	1,350	1,256	1,159
	0,25	1,021	1,023	1,027	1,127	1,171	1,219	0,929	0,809	0,668
$\sigma^{(2)}/N^*$	0,02	2,300	2,363	2,476	2,284	2,341	2,448	2,317	2,402	2,541
	0,15	1,764	1,814	1,887	1,682	1,696	1,743	1,849	2,005	2,214
	0,25	1,466	1,509	1,564	1,359	1,361	1,369	1,559	1,719	1,923

На рис. 1, б дана зависимость минимальной величины посадки $\varepsilon_{\min}$ от точки приложения сосредоточенной силы для некоторых геометрических параметров кольца $\delta = \frac{b}{r_1}$ (b — ширина кольца).

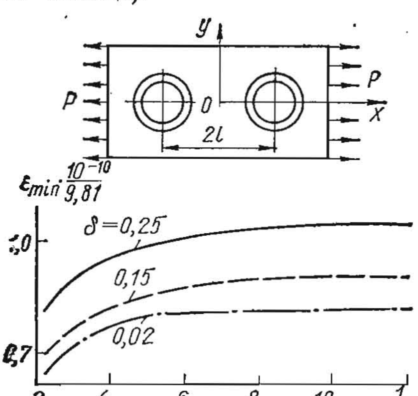

Рис. 2.

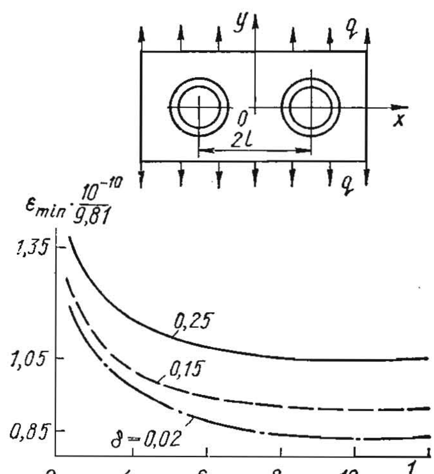

Рис. 3.

2. К кольцу приложено внутреннее давление.
В этом случае

$$P_n^{(1)} = P_n^{(2)} = 0; \quad P_n^{(3)} = -\frac{h^*}{h} r_2 N^* \delta_{-n}.$$

В таблице приведены числовые значения нормальных напряжений $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ в сечении кольца, а также кольцевых σ_θ и радиальных σ_ρ напряжений на линии контакта для некоторых расстояний между центрами отверстий и геометрического параметра δ. Через σ_θ^* обозначено напряжение в пластинке без кольца [3].

3. Растяжение пластинки.

На бесконечности пластинка растягивается усилиями $\sigma_x^\infty = p$, $\sigma_y^\infty = q$, $\tau_{xy}^\infty = 0$. Тогда

$$\varphi_*(z) = c_1 z; \quad \psi_*(z) = d_1 z; \quad c_1 = \frac{p+q}{4}; \quad d_1 = -\frac{p-q}{2}$$

и

$$P_n^{(1)} = 2(1-\varkappa)c_1 r_1\left(\delta_{-n} + \frac{1}{4}\varepsilon_1^{-1}\delta_{-n+1}\right) + d_1 r_1\left(\delta_{-n+2} + \frac{1}{2}\varepsilon_1^{-1}\delta_{-n+1}\right);$$

$$P_n^{(2)} = -d_1 r_1 \delta_{-n}; \quad P_n^{(3)} = 2c_1 r_1 \delta_{-n}.$$

При растяжении пластинки вдоль и поперек линии центров на рис. 2 и 3, для некоторых значений δ, соответственно показано влияние расстояния между центрами отверстий на минимальную величину посадки $\varepsilon_{\min}$.

Для числового примера была взята медная пластинка и стальное кольцо со следующими геометрическими и упругими постоянными: $\mu = 4{,}34 \times 10^{10}$ *н/м²*; $E^* = 2{,}06 \cdot 10^{10}$ *н/м²*; $\delta = \frac{b}{r_1}$; $\gamma = \frac{h^*}{h} = 1$; $\nu = 0{,}3$; $\varkappa = 2{,}08$. Расчеты произведены на ЭВМ «Минск-22».

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дис. Львовский ун-т, Львов, 1970.
2. Космодамианский А. С. Многосвязные пластинки. Изд-во Донецкого ун-та, Донецк, 1969.
3. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел, 2. Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 1965.

Львовский государственный университет

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ДИФФУЗИОННОЕ НАСЫЩЕНИЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА С ДВУСТОРОННИМ ПОКРЫТИЕМ

Д. В. Иващук, В. И. Лах, П. Р. Шевчук

Во многих случаях для обеспечения стабильности работы точных измерительных приборов, работающих в агрессивных средах при повышенных давлениях и температурах, их помещают в защитные устройства, которые можно моделировать полым цилиндром. Для придания защитной арматуре необходимого комплекса свойств очень часто на поверхность ее наносятся специальные покрытия, которые, однако, существенно усложняют расчет диффузионной проницаемости и напряженного состояния таких механических систем.

1. Определение поля концентрации. Рассмотрим длинный полый цилиндр, на внутренней ($r = R_1$) и внешней ($r = R_2$) поверхностях которого имеются тонкие покрытия постоянной толщины 2δ с отличными физико-механическими характеристиками. Цилиндр омывается изнутри и извне средами с давлениями q_1 и q_2 и концентрациями c_1 и c_2 вещества, которое может диффундировать в материал цилиндра через покрытия. Начиная с момента насыщения, распределение концентрации диффундирующего вещества в материале цилиндра описывается решением дифференциального уравнения

$$\frac{\omega}{\lambda} \cdot \frac{\partial c}{\partial \tau_1} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right) c \qquad (1)$$